ENS Lyon
L3 Probabilités

Informatique

Examen du 31 mai 2018
Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits.

Exercice 1

1. Oui.
2. C'est la loi géométrique de paramètre p vérifiant $1-p=(1-p_1)(1-p_2)$. Par exemple on peut dire que $\mathbf{P}(\min(X_1,X_2)\geqslant n)=\mathbf{P}(X_1\geqslant n)\mathbf{P}(X_2\geqslant n)$.
3. $\mathbf{P}(U\geqslant 2V)$ est l'aire du triangle $\{(u,v)\in[0,1]^2 : u\geqslant 2v\}$, soit $1/4$.
4. Ce graphe a 5 arêtes donc la probabilité invariante vaut $\pi(i)=\deg(i)/10$. En particulier l'espérance du temps de retour en 1 vaut $1/\pi(1)=5$.

Exercice 2

1. $\Phi_X(t)=1+it\mathbf{E}[X]-\frac{t^2}{2}\mathbf{E}[X^2]+o(t^2)$.
2. $\Phi_{Y_1}(t)=\Phi(X)(t/\sqrt{n})^n$.
3. Cf cours.

Exercice 3

1. On trouve 0.44.
2. On trouve $\pi(1)=1/9$, $\pi(2)=2/9$, $\pi(3)=6/9$. Déterminer la probabilité invariante de cette chaîne de Markov.
3. Non. Par exemple, $\mathbf{P}(Y_n=Y_{n+1}=1)>0$ tandis que $\mathbf{P}(Y_n=Y_{n+1}=Y_{n+2}=1)=0$, ce qui est incompatible avec la propriété de Markov.
4. Comme la chaîne est irréductible apériodique, le théorème de convergence s'applique et on obtient $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(X_n=k)=\pi(k)$ pour $k\in\{1,2,3\}$. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_n=1) &= \mathbf{P}(X_n=3,X_{n-1}=2)+\mathbf{P}(X_n=2,X_{n-1}=1)\\ &= \mathbf{P}(X_{n-1}=2)Q(2,3)+\mathbf{P}(X_{n-1}=1)Q(1,2)\\ &\to 1/9.\end{aligned}$$

Exercice 4

1. La vraisemblance est $L(\theta|x_1,\dots,x_n)=\theta^n\exp(-\theta(x_1+\cdots+x_n))$ qui est maximale pour $\theta=\frac{n}{x_1+\cdots+x_n}$. L'estimateur par maximum de vraisemblance est donc

$$\hat\theta(X_1+\cdots+X_n)=\frac{n}{X_1+\cdots+X_n}$$

2. Pour tout $\theta>0$, quand les (X_n) sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}_\theta$, la loi faible des grands nombres implique que la suite $(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\mathbf{E}X_1=\frac{1}{\theta}$. On en déduit donc que $(\hat\theta_n)$ converge en probabilité vers θ : l'estimateur est consistant.

Exercice 5

1. Numérotons de 1 à k les côtés de P_n ; par symétrie, on peut supposer sans perte de généralité que l'un des côtés choisi est 1, et que le polygone choisi est celui contenant le sommet commun aux côtés 1 et 2. Il est alors évident que le nombre de côtés de P_{n+1} suit la loi uniforme dans $\{3,\cdots,k+1\}$. On a donc bien $\mathbf{P}(Y_{n+1}=j|Y_n=i)=Q(i,j)$ et l'hypothèse d'indépendance entre les étapes (implicite dans l'énoncé) garantit que (Y_n) est une chaîne de Markov.

2. On calcule
$$\mathbf{E}\left[s^{Y_{n+1}}\right]=\mathbf{E}\left[\frac{1}{Y_n+2}\sum_{i=0}^{Y_n+1}s^i\right]=\frac{1}{1-s}\mathbf{E}\left[\frac{1-s^{Y_n+2}}{Y_n+2}\right]$$
Supposons maintenant que Y_n (et donc Y_{n+1}) ait loi π. Alors
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}((1-s)G(s))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}((1-s)\mathbf{E}\left[s^{Y_{n+1}}\right])=-\mathbf{E}\left[s^{Y_n+1}\right]=-sG(s)$$
3. La résolution (en utilisant le fait que $G(1)=1$) donne $G(s)=\exp(s-1)$ qui la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre 1. Réciproquement, le calcul de la question précédente donne aussi que la loi de Poisson de paramètre 1 est bien une probabilité invariante.
4. Comme la chaîne est apériodique irréductible, le théorème de convergence s'applique et on obtient $1/e$ comme limite.

Exercice 6

1. Soit N_k le nombre de cliques de taille k dans G. En utilisant la linéarité de l'espérance, on calcule
$$\mathbf{E}[N_k]=\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}\leqslant n^k2^{-\binom{k}{2}}=2^{k\left(\log_2 n-\frac{k-1}{2}\right)}$$
Ainsi lorsque $k=\lfloor(2+\varepsilon)\log_2 n\rfloor$, on a $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[N_k]=0$. On conclut avec l'inégalité de Markov
$$\mathbf{P}(X_G\geqslant k)=\mathbf{P}(N_k\geqslant 1)\leqslant\mathbf{E}[N_k]\to 0.$$
2. Si un sommet i n'est pas dans la clique K retournée par l'algorithme, c'est qu'il existe $j<i$ avec $j\in K$ et sans arête (i,j). La clique retournée est donc maximale. On a
$$\mathbf{P}(\mathrm{card}(K)=k)=\sum_{\mathrm{card}(I)=k}\mathbf{P}(K=I)\leqslant\sum_{\mathrm{card}(I)=k}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\notin I}A_{I,j}\right),$$
où $A_{I,j}$ est l'événement «il existe $i\in I$ non relié à j ». On a $\mathbf{P}(A_{I,j})=1-2^{-k}$ pour tout $j\notin I$, et de plus pour chaque I les événements $(A_{I,j})_{j\notin I}$ sont indépendants par le lemme de groupement par paquets, d'où la formule voulue.
3. Il suffit de voir que l'algorithme renvoie une clique de taille au moins $(1-\varepsilon)\log_2 n$ avec probabilité tendant vers 1. Par la question précédente, la probabilité que ce ne soit pas le cas est majorée par $p:=\sum_{k=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n}q_k$ avec $q_k=\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}$. Ecrivons $k=(1-\alpha)\log_n$ avec $\alpha\geqslant\varepsilon$. Un petit calcul donne alors que pour n assez grand
$$(1-2^{-k})^{n-k}\leqslant 2e^{-n^\alpha},\quad\binom{n}{k}\leqslant e^{n^\alpha/2}$$
et donc chaque q_k est majoré par $2e^{-n^\varepsilon/2}$, et $p\leqslant 2\log_2 ne^{-n^\varepsilon/2}$ tend vers 0.

Exercice 7

On partitionne F au hasard en décidant indépendamment et uniformément si chaque $x\in F$ est dans F_1 ou F_2. Pour $i\in I$, soit E_i l'événement $\{A_i\cap F_1=\emptyset\}\cup\{A_i\cap F_1=\emptyset\}$. Les hypothèses impliquent que chaque événement E_i est indépendant de tous les autres E_j sauf au plus $2^k/8$ d'entre eux ; autrement dit le graphe d'indépendance sous-jacent a degré $\leqslant 2^k/8=:d$. Par ailleurs, $\mathbf{P}(E_i)\leqslant 2\cdot 2^{-k}=:p$. Comme $4dp=1$, on peut conclure par le lemme local de Lovász.