ENS Lyon
L3 Probabilités

Informatique

Examen du 31 mai 2018
Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits.

Exercice 1 Échauffement

1. Soient X et Y deux bits aléatoires uniformes et indépendants. Est-ce que X et $X \oplus Y$ (l'addition modulo 2) sont indépendants ?
2. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2. Quelle est la loi de $\min(X_1, X_2)$?
3. Soient U et V deux v.a. i.i.d de loi uniforme dans $[0, 1]$. Calculer $\mathbf{P}(U \geqslant 2V)$.
4. On considère la marche aléatoire sur le graphe de sommets $\{1, \dots, 5\}$ dans lequel les sommets i et j sont reliés par une arête si et seulement si $i + j$ est un nombre premier. Si la marche part du sommet 1, combien en moyenne faut-il effectuer de pas pour y revenir ?

Exercice 2 Question de cours

On rappelle que la fonction caractéristique de la loi $N(0, 1)$ est $\Phi : t \mapsto \exp(-t^2/2)$.

1. Soit X une v.a. L^2. Donner sans justification le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction caractéristique de X.
2. On suppose désormais X d'espérance nulle. Soit (X_n) des copies indépendantes de X. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire
$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$
en fonction de celle de X.
3. Démontrer le théorème central limite comme conséquence du théorème de Lévy.

Exercice 3 Chaîne de Markov à 3 états

On considère la chaîne de Markov d'espaces d'états $S = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

et $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov associée vérifiant $X_0 = 1$.

1. Calculer $\mathbf{P}(X_2) = 2$.
2. Déterminer la probabilité invariante de cette chaîne de Markov.
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$. Est-ce que $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ est une chaîne de Markov ? Justifier.
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n = 1)$.

Exercice 4 Maximum de vraisemblance

On considère le modèle statistique formé de la famille de lois exponentielles $(\mathcal{E}_\theta)_{\theta > 0}$. On rappelle que $\mathcal{E}_\theta$ a pour densité $x \mapsto \theta \exp(-\theta x) \mathbf{1}_{x \geqslant 0}$.

1. Déterminer l'estimateur de θ obtenu par le principe du maximum de vraisemblance.
2. Cet estimateur est-il consistant ?

Exercice 5 Polygones aléatoires

On définit par récurrence une suite (P_n) de polygones convexes de la manière suivante : P_0 est un triangle, et pour déterminer P_n on choisit au hasard deux côtés distincts du polygone P_{n-1} (selon la loi uniforme sur les couples de côtés distincts) et on relie leurs milieux par une arête. Le polygone P_n est choisi parmi les deux polygones ainsi délimités, chacun ayant probabilité $\frac{1}{2}$. Soit X_n le nombre de côtés du polygone P_n et $Y_n = X_n - 3$.

1. Expliquer pourquoi (Y_n) est une chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbf{N}$ et de matrice de transition
$$Q(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{m+2} & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant m+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. On suppose que π est une probabilité invariante pour cette chaîne, et on pose
$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) s^n.$$
Montrer que G est solution de l'équation
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}((1-s)G(s)) = -sG(s).$$
Indication. *Écrire* $\mathbf{E}\left[s^{Y_{n+1}}\right]$ *comme l'espérance d'une fonction de* Y_n.
3. Résoudre cette équation et en déduire que (Y_n) admet une unique probabilité invariante que l'on explicitera (il s'agit d'une des lois classiques).
4. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(P_n \text{ est un triangle}).$$

Exercice 6 Plus grande clique dans un graphe aléatoire

Soit $G = (V,E)$ un graphe aléatoire d'Erdős–Rényi de loi $\mathcal{G}_{n,1/2}$ (n sommets, chaque arête présente indépendamment avec probabilité 1/2). On note X_n la taille maximale d'une clique de G, c'est-à-dire
$$X_n = \max\{\operatorname{card}(S) \,:\, S \subset V \text{ vérifiant } ij \in E \text{ pour tous } i \neq j \text{ dans } S\}\,.$$

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leqslant (2+\varepsilon)\log_2 n) = 1.$$
Indication : *calculer le nombre moyen de cliques de taille fixée.*
2. On considère l'algorithme suivant.
Commencer avec $K = \emptyset$
Pour i allant de 1 à n
    Si i est adjacent à tous les sommets de K, ajouter i à K
Retourner K.

Montrer que l'algorithme retourne toujours une clique maximale (au sens où elle n'est pas contenue dans une clique strictement plus grande). Déduire de ce fait que
$$\mathbf{P}(\text{L'algorithme retourne une clique de taille } k) \leqslant \binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}$$
3. Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \geqslant (1-\varepsilon)\log_2 n) = 1.$$

Exercice 7 Lemme local de Lovász

Soit $k \geqslant 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que

1. Pour tout $i \in I$, $\operatorname{card}(A_i) = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $\operatorname{card}\{i \in I \,:\, x \in A_i\} \leqslant \frac{2^k}{8k}$.

En utilisant le lemme local de Lovász, montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que
$$\forall i \in I, \quad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$