TD n°01

Exercice 1 - Géopolitique des indépendants

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préférerait un garçon.
On va considérer les trois évènements suivants :

A	l'héritier d'Aquitaine est un garçon,
B	l'héritier de Bourgogne est un garçon,
C	les deux héritiers sont de même sexe.

1.1 Montrez que ces trois évènements suivants sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.

1.2 Jusqu'ici, nous avons supposé que la probabilité d'avoir un garçon et celle d'avoir une fille étaient égales à 1/2. En notant p la probabilité d'avoir un garçon (celle d'avoir une fille est alors $1 - p$), trouvez les valeurs de p pour lesquelles les évènements A et C sont indépendants.

Exercice 2 - Indépendance des compléments

Montrer qu'une famille d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est indépendante si et seulement si la famille des compléments $(\overline{A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est indépendante.

Exercice 3 - Poker

Comptez les probabilités des combinaisons de cartes au poker (première disposition sans joker).

Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, formé de 4 couleurs (trêfle, carreau, cœur, pique) contenant chacune 13 figures (2, 3,. . ., 10, valet, dame, roi, as). L'as est la carte la plus forte mais il peut parfois être considéré comme la plus faible (Quinte et quinte flush).
Les combinaisons que l'on peut faire au poker sont :

- La paire : 2 cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes une double paire, un full ou un carré.
- La double paire : 2 séries différentes de deux cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes un full.
- Le brelan : trois cartes de la même valeur mais qui ne forment pas avec les autres cartes un carré ou un full.
- La quinte ou suite : 5 cartes consécutives de différentes couleurs.
- La couleur ou flush : 5 cartes de la même couleur.
- Le full : Trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de même valeur d'autre part.
- Le carré : 4 cartes de la même valeur.
- La quinte flush : 5 cartes consécutives d'une même couleur.

Exercice 4 - Monty Hall

Monty est le présentateur d'un jeu télévisé qui se déroule de la manière suivante. Il y a trois rideaux : derrière l'un, il y a une voiture à gagner, et derrière chacun des deux autres, il y a une chèvre. Bob, le participant, doit choisir un rideau, en espérant choisir celui derrière lequel se cache la voiture. Appelons le rideau que Bob ouvre le rideau 1.
Ensuite, Monty ouvre l'un des deux autres rideaux, où se cache une chèvre (il se peut que Monty ait en fait le choix entre ces deux rideaux ; dans ce cas, on suppose qu'il choisit uniformément au hasard). Supposons que le rideau que Monty ouvre est le rideau 2. Bob doit ensuite décider s'il garde le rideau qu'il a choisi au début, ou bien s'il change avec l'autre rideau fermé restant. Une fois ce choix effectué, Monty ouvre le rideau choisi par Bob et Bob gagne ce qui se cache derrière.

4.1 Est-ce que Bob a intérêt de changer de rideau à l'étape intermédiaire, ou bien cela ne fait-il aucune différence ? (on suppose bien évidemment que Bob préfère gagner la voiture plutôt qu'une chèvre.... !)

4.2 Supposons qu'au lieu d'ouvrir un porte qui contient une chèvre, Monty choisit d'ouvrir une porte au hasard indépendamment du contenu de cette porte. Bob avait choisi le rideau 1, et Monty ouvre le rideau 2 et il se trouve qu'une chevre se trouve derriere ce rideau. Bob doit il changer son choix ?

Exercice 5 - Formule de Poincaré

On se donne une suite d'évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

5.1 Démontrez la formule suivante, due à Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right).$$