TD n°03

14-15 février 2018

Exercice 1 - Le singe savant

Un singe tape sur un clavier contenant 26 touches (une touche par lettre, et seulement en minuscule). À chaque fois, il choisit la prochaine touche au hasard, de manière indépendante et uniforme. On suppose que le singe tape 1 million de touches au total. Quelle est l'espérance du nombre de fois où le mot "preuve" apparaît ?

Exercice 2 - Test de dépistage

Un grand nombre n de gens doivent se soumettre à un test de dépistage. Cette opération peut se gérer de deux façons :

1. Chaque échantillon est testé séparément, auquel cas n tests sont nécessaires.
2. Les échantillons sont mélangés par paquets de k puis le mélange est testé. Si le test est négatif, ce test suffit. Si le test est positif, chacun des k échantillons doit être retesté séparément, ce qui donne un nombre final de tests de $k + 1$.

Soit p la probabilité qu'un échantillon soit positif. On suppose que les échantillons sont indépendants et identiquement distribués, et que k divise n.

2.1 Quelle est la probabilité p_k qu'un mélange de k échantillons soit positif ?

2.2 On considère la variable aléatoire X représentant le nombre de tests total que l'on effectue avec la seconde méthode. Quelles sont les valeurs prises par X ? avec quelles probabilités ?

2.3 Quelle est l'espérance du nombre de tests nécessaires en utilisant la seconde méthode ?

Exercice 3 - 66

On lance un dé (équilibré) jusqu'à obtenir deux 6 consécutifs. Quelle est l'espérance du nombre de lancers avant que l'on ne s'arrête ?

Exercice 4 - Pourquoi a-t-on besoin des σ-algèbres ?

Le but de cet exercice est de montrer que si on veut que la probabilité ait des propriétés “raisonnables”, on ne peut pas la définir pour tous les sous-ensembles de Ω. Autrement dit, on a vraiment besoin des σ-algèbres.

Pour définir une distribution uniforme sur $[0, 1]$, on souhaite que la probabilité respecte les trois propriétés suivantes :

Propriété 1. *Pour* $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\quad P([a, b]) = P([a, b[) = P(]a, b]) = P(]a, b[) = b - a$.

Propriété 2 (*Stabilité par translation*)**.** *Pour* $A \subseteq [0, 1]$ *et* $0 \leq r \leq 1$, *on définit le* r-décalage *de* A, *noté* $A \oplus r$ *de la manière suivante :*

$$A \oplus r = \{a + r \mid a \in A, a + r \leq 1\} \cup \{a + r - 1 \mid a \in A, a + r > 1\} .$$

Alors P *vérifie :* $\quad P(A \oplus r) = P(A)$.

Propriété 3 (*Additivité dénombrable*)**.** *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille de sous-ensembles disjoints de* $[0,1]$*, alors*

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)\ .$$

On va montrer qu'il n'existe pas la fonction P definie pour tous les sous-ensembles de Ω.

4.1 On définit la relation $\sim$ suivante, sur les réels de $[0,1]$: pour $x, y \in [0,1]$, on dit que $x \sim y$ si et seulement si $y - x$ est rationnel. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

4.2 Définir un ensemble H comme un sous-ensemble de $[0,1]$ contenant un élément de chaque classe d'équivalence. Utiliser l'axiome de choix.

Axiome Du Choix Soit $(A_i)_{i\in I}$ une collection d'ensembles non-vides (pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$). Alors leur produit cartésien $\prod_{i\in I} A_i$ est non-vide, c'est-à-dire qu'on peut "choisir simultanément" un élément $a_i \in A_i$ pour chaque $i \in I$.

4.3 Aboutir à une contradiction en utilisant l'ensemble H.

Exercice 5 - Somme de variables symétriques

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que X_i et $-X_i$ ont la même distribution. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que pour tout t, $\mathbf{P}\{S_n \geq t\} = \mathbf{P}\{S_n \leq -t\}$. Qu'en est-il si les variables ne sont plus supposées indépendantes ?

Exercice 6 - Variante de la distribution géométrique

La distribution géométrique correspond à la distribution du nombre de fois où l'on tire à pile ou face avant d'obtenir pile. On considère ici une variante appelée *distribution binomiale négative* : elle correspond au nombre de fois X où l'on tire à pile ou face avant d'obtenir le $k$ième pile. La pièce utilisée pour tirer à pile ou face n'est pas forcément équilibrée : elle tombe sur pile avec probabilité p.

6.1 Donner la distribution de cette variable aléatoire.

6.2 Trouver l'espérance de cette distribution.