TD n°10

11 avril 2018

Exercice 1 - Nombre chromatique

Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier naturel χ tel qu'il est possible de colorer les sommets de G avec χ couleurs sans avoir les deux extrémités d'une arête de la même couleur. La maille d'un graphe (girth en anglais) est la taille d'un plus court cycle. On pourrait penser que si G a maille élevée, alors $\chi(G)$ est borné. Cela s'avère pourtant faux.
Prouvez que pour toute paire d'entiers k, ℓ, il y a un graphe G de nombre chromatique au moins k et de maille au moins ℓ.

Exercice 2 - Second moment

On considère des graphes de $G_{n,p}$ dans deux régimes : (1) $p = o(n^{-2/3})$ et (2) $p = \omega(n^{-2/3})$.

2.1 Montrez que, pour tout $\varepsilon > 0$ et n suffisamment grand, dans le premier régime, un graphe a une clique de taille 4 avec probabilité moins que ε.

On veut maintenant montrer que dans le second régime, un graphe a une clique de taille 4 avec probabilité proche de 1.

2.2 Soit X une variable aléatoire positive ou nulle.
Montrez que $\mathbf{P}\{X = 0\} \leqslant \frac{\mathbf{Var}\{X\}}{\mathbf{E}\{X\}^2}$.

2.3 Soit $Y_1, \ldots, Y_m$ des variables aléatoires 0/1 et $Y = \Sigma_{1 \leqslant i \leqslant m} Y_i$.
Montrez que $\mathbf{Var}\{Y\} \leqslant \mathbf{E}\{Y\} + \Sigma_{1 \leqslant i \neq j \leqslant m} \mathbf{Cov}(Y_i, Y_j)$.

Soit X le nombre de cliques de taille 4.

2.4 Montrez que $\mathbf{Var}\{X\} = o(\mathbf{E}\{X\}^2)$ et conclure.

Exercice 3 - Deuxième lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ une famille d'événements mutuellement indépendants, et $\Sigma_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_i\} = \infty$.
Montrez que $\mathbf{P}\{\text{une infinité de } A_i \text{ se réalise}\} = 1$.

Exercice 4 - Nombre normaux

Pour tout symbole $a \in \Sigma$, on note $\mathrm{occ}(w, a)$ le nombre d'occurrences de a dans le mot w. Un nombre réel de $[0, 1]$ écrit $0.d_1d_2d_3...$ en base b est dit *simplement normal en base* b si $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{occ}(d_1d_2...d_n, a)}{n} = \frac{1}{b}$ pour tout $a \in \{0, \ldots, b-1\}$.
Il est dit *normal en base* b si $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{occ}(d_1d_2...d_n, v)}{n} = \frac{1}{b^{|v|}}$ pour tout mot $v \in \{0, \ldots, b-1\}^{|v|}$.
Un nombre est dit *(simplement) normal* s'il est, pour tout naturel b, (simplement) normal en base b.

4.1 Montrez que tout nombre simplement normal est normal.

4.2 Soit X un nombre tiré uniformément aléatoirement dans l'intervalle $[0, 1]$. Montrez que X est simplement normal avec probabilité 1.