ENS LYON — Informatique

L3 Probabilités

Devoir maison numéro 1

A rendre pour le 28 mars.

Exercice 1

Dans le problème du collectionneur de vignettes, on s'intéresse au premier instant où la vignette obtenue est un double. Autrement dit, si (X_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$. On pose $T_N = \min\{n : \exists m \in \{1, \cdots, n-1\} \text{ t.q. } X_m = X_n\}$. Déterminer la limite suivante, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{T_N}{\sqrt{N}} \leqslant t\right).$$

En déduire le plus grand nombre α tel que dans 99% des collections de $N \gg 1$ vignettes, les $\alpha\sqrt{N}$ premières vignettes sont différentes.

Indication : *Utiliser l'encadrement* $e^{-t-t^2} \leqslant 1 - t \leqslant e^{-t}$ *pour* $t \in [0, \frac{1}{2}]$.

Exercice 2

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{0, 1\}$. On note $\alpha = \frac{1}{n^2} \sum a_{i,j}$ la proportion de coefficients de A égaux à 1, et on suppose $\alpha \geqslant \frac{1}{100}$. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices obtenues en appliquant à chaque ligne de A une permutation circulaire des éléments (autrement dit, $B \in \mathcal{A}$ si et seulement si il existe des entiers $k_1, \ldots, k_n$ tels que $B_{i,j} = A_{i,j+k_i}$, l'addition étant modulo n). Montrer par un argument probabiliste qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{A}$ dont chaque colonne contient au plus $\alpha n + C\sqrt{n \log n}$ coefficients égaux à 1, pour une constante $C > 0$ dont on précisera la valeur.

Exercice 3

On définit la *distance de Hamming* d sur l'hypercube $H_n = \{-1, 1\}^n$ comme suit : si $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ sont dans H_n, alors $d(x, y)$ est le nombre de coordonnées $i \in \{1, \ldots, n\}$ telles que $x_i \neq y_i$.

1. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur H_n, alors pour tout $\delta > 0$,
$$\mathbf{P}\left(d(X, Y) \leqslant \frac{n}{2} - \delta\right) \leqslant \exp(-2\delta^2/n).$$
2. En appliquant cette inégalité pour $\delta = n/4$, montrer le résultat suivant : pour tout entier n, on peut trouver $\exp(n/16)$ vecteurs unités dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ qui sont deux à deux à distance au moins 1.

Exercice 4

Alice et Bob jouent au jeu suivant, dans lequel ils coopèrent. Alice observe une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2, puis doit choisir un entier $a \in \mathbf{N}$. De même, Bob observe une suite $(B_n)_{n \geqslant 0}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2 (de plus, les suites (A_n) et (B_n) sont indépendantes), puis doit choisir un entier $b \in \mathbf{N}$. Alice et Bob ne peuvent pas communiquer. Ils gagnent le jeu si $A_b = B_a = 1$.

Une stratégie pour chaque joueur correspond à une fonction $f : \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$. La probabilité de gain optimale est

$$p = \sup_{f_A, f_B} \mathbf{P}(\text{Alice et Bob gagnent en appliquant les stratégies } f_A \text{ et } f_B).$$

Donner un encadrement de p aussi précis que vous le pouvez (je ne connais pas la valeur exacte de p... saurez-vous donner un meilleur encadrement que moi ?)