ENS LYON — Informatique
L3 Probabilités

Examen du 27 mai 2019 : corrigé succinct

Exercice 1 Sous-ensembles aléatoires

Soient $X_i = \mathbf{1}_{\{i \in X\}}$ et $Y_i = \mathbf{1}_{\{i \in Y\}}$. Les v.a. $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ sont i.i.d. de loi $\mathsf{B}(1/2)$, et

$$\mathbf{P}(X \subset Y) = \mathbf{P}(\forall i, X_i \leqslant Y_i) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant Y_1)^n = (3/4)^n.$$

Enfin, $\mathbf{P}(X \cup Y = \{1, \ldots, n\}) = \mathbf{P}(X^c \subset Y) = (3/4)^n$ puisque X^c a même loi que X.

Exercice 2 Probabillité invariante

Notons π la mesure invariante. La méthode des cut-sets pour la partition $\{0, \ldots, i\} \cup \{i+1, \ldots, n\}$ donne la relation

$$\pi(i)Q(i, i+1) = \sum_{j=i+1}^{n} \pi(j)Q(j, 0)$$

d'où $\pi(i) = \pi(i+1) + \cdots + \pi(n)$. En soustrayant les équations obtenues pour les indices i et $i+1$, on obtient $\pi(i) = 2\pi(i+1)$ si $i < n-1$, et $\pi(n-1) = \pi(n)$. La solution est alors $\pi(i) = \frac{1}{2^{i+1}}$ si $i < n$ et $\pi(n) = \frac{1}{2^n}$; c'est une loi géométrique tronquée.

Exercice 3 Marche aléatoire sur un graphe

1. La mesure invariante π vérifie $\pi(w) = \frac{1}{\mathbf{E}_w[T_w]} = \frac{\deg(w)}{2|E|}$, donc $\mathbf{E}_w[T_w] = 2|E|$. Par ailleurs comme le premier pas depuis w est nécessairement vers x, on a $\mathbf{E}_w[T_w] = 1 + \mathbf{E}_x[T_w]$, donc $\mathbf{E}_x[T_w] = 2|E| - 1$.
2. Soient (V_u, E_u) et (V_v, E_v) les composantes connexes de $(V, E \setminus \{u, v\})$ contenant respectivement u et v. La valeur de $\mathbf{E}_u[T_v]$ est la même dans les graphes G et $(V_u, E_u \cup \{u, v\})$, et donc par la question 1. on a $\mathbf{E}_u[T_v] = 2|E_u| + 1$. De même, $\mathbf{E}_v[T_u] = 2|E_v| + 1$, donc $\mathbf{E}_u[T_v] + \mathbf{E}_v[T_u] = 2|E_u| + 2|E_v| + 2 = 2|E|$.

Exercice 4 Chaîne de Markov à 4 états

1. Les états 3. et 4. sont récurrents, et les états 1. et 2. sont transients.
2. Soit $A = \{\exists n,\ X_n = 4\} = \{\exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ X_n = 4\}$. On a

$$\mathbf{P}_1(A) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}_1(A \text{ et } X_1 = i) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}_1(X_i = i)\mathbf{P}_i(A)$$

et de même pour $\mathbf{P}_2$. On en déduit les équations $\mathbf{P}_1(A) = \frac{1}{4}\mathbf{P}_1(A) + \frac{1}{4}\mathbf{P}_2(A) + \frac{1}{6}$ et $\mathbf{P}_2(A) = \frac{1}{3}\mathbf{P}_1(A) + \frac{1}{3}$, d'où $\mathbf{P}_1(A) = 3/8$.

Exercice 5 Nombre de croisements

1. Par récurrence sur $\mathrm{cr}(G)$: si un graphe peut être tracé dans le plan avec t croisements, le graphe privé d'une arête qui croise peut être tracé dans le plan avec $t-1$ croisements.
2. Considérons une représentation de G dans le plan avec $\mathrm{cr}(G)$ croisements. Soient $(X_v)_{v \in V}$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathsf{B}(p)$, et $V' = \{v \in V\ :\ X_v = 1\}$, $E' = \{\{u, v\} \in E\ :\ X_u = X_v = 1\}$. Soit $t(G')$ le nombre de croisements de $G' = (V', E')$ dans la représentation considérée. Par la question 1., on a $t(G') \geqslant |E'| - 3|V'|$, et donc $\mathbf{E}[t(G')] \geqslant \mathbf{E}[|E'|] - 3\mathbf{E}[|V|]$. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbf{E}[t(G')] = p^4 \mathrm{cr}(G)$, $\mathbf{E}[|E'|] = p^2|E|$ et $\mathbf{E}[|V'|] = p|V|$, d'où le résultat voulu.
3. Il suffit d'appliquer la question 2. pour $p = \frac{4|V|}{|E|} \leqslant 1$.

Exercice 6 Graphe aléatoire géométrique

1. (a) On a $z_1 \in I$ si et seulement si $z_1 \in [r, 1-r]^2$ et $||z_i - z_1|| > r$. On a donc

$$\mathbf{P}(z_1 \in I) = \mathbf{P}(z_1 \in [r,1-r]^2)\mathbf{P}(\forall i > 1, ||z_i - z_1|| > r \,|\, z_1 \in [r,1-r]^2) = (1-2r)^2(1-\pi r^2)^{n-1}$$

en utilisant l'indépendance et le fait que $\mathbf{P}(||z_2 - z_1|| > r \,|\, z_1 \in [r,1-r]^2) = (1-\pi r^2)$, l'aire de $[0,1]^2 \setminus B(z_1, r)$.

Conditionnellement à $z_1 \in I$, les points $(z_2, \ldots, z_n)$ sont indépendants de loi uniforme dans $[0,1]^2 \setminus B(z_1, r)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(z_2 \in I \,|\, z_1 \in I) &= \mathbf{P}(z_2 \in [r,1-r]^2 \,|\, z_1 \in I)\mathbf{P}(z_2 \in I \,|\, z_2 \in [r,1-r]^2,\ z_1 \in I) \\
&\leqslant 1 \cdot \prod_{i=3}^{n} \mathbf{P}(||z_i - z_2|| > r \,|\, z_2 \in [r,1-r]^2,\ z_1 \in I) \\
&\leqslant \left(\frac{1-2\pi r^2}{1-\pi r^2}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

puisque l'aire de $[0,1]^2$ privé de deux boules de rayon r est majorée par $1 - 2\pi r^2$.

(b) Soit $r = c\sqrt{\log(n)/n}$, et $N = |I|$. On calcule $\mathbf{E}[N]$ et $\mathbf{E}[N^2]$ par linéarité de l'espérance.

$$\mathbf{E}[N] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(z_i \in I) \sim n\left(1 - \frac{c^2\pi\log(n)}{n}\right)^n \sim n^{1-c^2\pi}.$$

$$\mathbf{E}[N^2] = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{P}(z_i, z_j \in I) \leqslant \mathbf{E}[N] + n^2\mathbf{P}(z_1 \in I)\left(1 - \frac{\pi r^2}{1-\pi r^2}\right)^{n-2}.$$

Choisissons $c < 1/\sqrt{\pi}$. On a alors $\mathbf{E}[N]^2 \sim \mathbf{E}[N^2] \sim n^{2-2c^2\pi}$, et donc

$$\mathbf{P}(N=0) \leqslant \mathbf{P}(|N - \mathbf{E}[N]| \geqslant \mathbf{E}[N]) \leqslant \frac{\mathbf{Var}(N)}{\mathbf{E}[N]^2} = \frac{\mathbf{E}[N^2]}{\mathbf{E}[N]^2} - 1$$

par l'inégalité de Tchebychev, d'où $\lim \mathbf{P}(N=0) = 0$, ce qui implique le résultat voulu.

2. (a) Pour tout i, $\mathbf{P}(A_i \cap V = \emptyset) = \mathbf{P}(\forall j, z_i \notin A_j) = (1 - 1/k^2)^n \leqslant \exp(-n/k^2) \leqslant \exp(-\log n) = \frac{1}{n}$ (on a utilisé l'indépendance). On a donc par la borne de l'union,

$$\mathbf{P}(\exists i \,:\, A_i \cap V = \emptyset) \leqslant k^2\mathbf{P}(A_1 \cap V = \emptyset) \leqslant \frac{1}{\log n} \to 0.$$

(b) Soit $r = \sqrt{5}/k$ où k est défini à la question précédente. Dès que chaque petit carré A_i contient un élément de V, le graphe $G(n,r)$ est connexe (en effet, deux points situés dans deux carrés adjacents sont à distance au plus $\sqrt{5}/k$). À l'aide de la question précédente, on en déduit que toute constante $C > \sqrt{5}$ convient.

Exercice 7 Polygones aléatoires

1. Numérotons de 1 à k les côtés de P_n ; par symétrie, on peut supposer sans perte de généralité que l'un des côtés choisi est 1, et que le polygone choisi est celui contenant le sommet commun aux côtés 1 et 2. Il est alors évident que le nombre de côtés de P_{n+1} suit la loi uniforme dans $\{3, \cdots, k+1\}$. On a donc bien $\mathbf{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = Q(i,j)$ et l'hypothèse d'indépendance entre les étapes (implicite dans l'énoncé) garantit que (Y_n) est une chaîne de Markov.
2. On calcule
$$\mathbf{E}\left[s^{Y_{n+1}}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{Y_n+2}\sum_{i=0}^{Y_n+1} s^i\right] = \frac{1}{1-s}\mathbf{E}\left[\frac{1-s^{Y_n+2}}{Y_n+2}\right]$$
Supposons maintenant que Y_n (et donc Y_{n+1}) ait loi π. Alors
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}((1-s)G(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}((1-s)\mathbf{E}\left[s^{Y_{n+1}}\right]) = -\mathbf{E}\left[s^{Y_n+1}\right] = -sG(s)$$
3. La résolution (en utilisant le fait que $G(1) = 1$) donne $G(s) = \exp(s-1)$ qui la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre 1. Réciproquement, le calcul de la question précédente donne aussi que la loi de Poisson de paramètre 1 est bien une probabilité invariante.
4. Comme la chaîne est apériodique irréductible, le théorème de convergence s'applique et on obtient $1/e$ comme limite.