ENS LYON
L3 Probabilités

Informatique

Examen du 27 mai 2019
Durée : 3 heures
Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice 1 Sous-ensembles aléatoires

Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $P(\{1, \cdots, n\})$, l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$. Calculer $\mathbf{P}(X \subset Y)$ et $\mathbf{P}(X \cup Y = \{1, \ldots, n\})$.

Exercice 2 Probabillité invariante

Soit la chaîne de Markov d'espace d'états $\{0, \ldots, n\}$ et de matrice de transition donnée par $Q(i, 0) = Q(i, i+1) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, et $Q(n, n) = Q(n, 0) = 1/2$, les autres termes étant nuls. Déterminer la probabilité invariante.

Exercice 3 Marche aléatoire sur un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non orienté connexe, (X_n) la marche aléatoire sur G, et $T_u = \inf\{n > 0 : X_n = u\}$ le temps d'atteinte d'un sommet $u \in V$.

1. Soit $w \in V$ un sommet de degré 1, et x son unique voisin. Que vaut $\mathbf{E}_w[T_w]$? Que vaut $\mathbf{E}_x[T_w]$?
2. Une arête $\{u, v\} \in E$ est un *pont* si le graphe $(V, E \setminus \{u, v\})$ n'est pas connexe. Montrer que si $\{u, v\}$ est un pont, alors
$$\mathbf{E}_u[T_v] + \mathbf{E}_v[T_u] = 2|E|.$$

Exercice 4 Chaîne de Markov à 4 états

On considère une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quels sont les états récurrents et transients ?
2. Calculer $\mathbf{P}(\exists n : X_n = 4 | X_0 = 1)$.

Exercice 5 Nombre de croisements

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non orienté. On définit $\mathrm{cr}(G)$ comme le nombre minimal de croisements entre arêtes lorsqu'on représente G dans le plan. Ainsi $\mathrm{cr}(G) = 0$ si et seulement si G est planaire.

1. En utilisant le fait (admis) qu'un graphe planaire à n sommets a au plus $3n$ arêtes, montrer l'inégalité
$$\mathrm{cr}(G) \geqslant |E| - 3|V|.$$
2. Utiliser un argument probabiliste pour montrer que pout tout $p \in [0, 1]$, on a
$$p^4 \mathrm{cr}(G) \geqslant p^2 |E| - 3p|V|.$$
3. En déduire l'inégalité suivante : si $|E| \geqslant 4|V|$, alors
$$\mathrm{cr}(G) \geqslant \frac{|E|^3}{64|V|^2}.$$

Exercice 6 Graphe aléatoire géométrique

Soient $z_1, \ldots, z_n$ des points choisis indépendamment selon la loi uniforme dans le carré $[0,1]^2$; autrement dit, les abscisses et les ordonnées de (z_i) sont $2n$ v.a. i.i.d de loi uniforme dans $[0,1]$. Pour $0 < r < 1/2$, on construit un graphe $G(n,r) = (V,E)$ de sommets $V = \{z_1, \ldots, z_n\}$ par la condition

$$\{z_i, z_j\} \in E \iff ||z_i - z_j|| \leqslant r,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne de $\mathbf{R}^2$.

1. (a) On note I l'ensemble des points (z_i) qui sont isolés dans $G(n,r)$ et à distance au moins r du bord du carré $[0,1]$. Montrer que

$$\mathbf{P}(z_1 \in I) = (1 - 4r(1-r))(1 - \pi r^2)^{n-1}$$

$$\mathbf{P}(z_2 \in I | z_1 \in I) \leqslant \left(1 - \frac{\pi r^2}{1 - \pi r^2}\right)^{n-2}$$

(b) En déduire que, pour une constante c à préciser, que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(G(n, c\sqrt{\log(n)/n}) \text{ est connexe}\right) = 0$$

2. (a) Soit $k = \lfloor \sqrt{\log n}/\sqrt{n} \rfloor$. On partitionne le carré $[0,1]^2$ en k^2 petits carrés de côté $1/k$ dénotés $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant k^2}$. Montrer que $\mathbf{P}(\forall i,\ A_i \cap V \neq \emptyset)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

(b) En déduire que, pour une constante C à préciser,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(G(n, C\sqrt{\log(n)/n}) \text{ est connexe}\right) = 1$$

Exercice 7 Polygones aléatoires

On définit par récurrence une suite (P_n) de polygones convexes de la manière suivante : P_0 est un triangle, et pour déterminer P_n on choisit au hasard deux côtés distincts du polygone P_{n-1} (selon la loi uniforme sur les couples de côtés distincts) et on relie leurs milieux par une arête. Le polygone P_n est choisi parmi les deux polygones ainsi délimités, chacun ayant probabilité $\frac{1}{2}$. Soit X_n le nombre de côtés du polygone P_n et $Y_n = X_n - 3$.

1. Expliquer pourquoi (Y_n) est une chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbf{N}$ et de matrice de transition

$$Q(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{m+2} & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant m+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On suppose que π est une probabilité invariante pour cette chaîne, et on pose

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) s^n.$$

Montrer que G est solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}((1-s)G(s)) = -sG(s).$$

Indication. *Écrire* $\mathbf{E}\left[s^{Y_{n+1}}\right]$ *comme l'espérance d'une fonction de* Y_n.

3. Résoudre cette équation et en déduire que (Y_n) admet une unique probabilité invariante que l'on explicitera (il s'agit d'une des lois classiques).

4. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(P_n \text{ est un triangle}).$$