ENS LYON — Informatique

L3 Probabilités

Examen partiel du 21 mars 2018

Corrigé

Exercice 1 Question de cours

Cf cours

Exercice 2 Indépendance

1. Vrai, conséquence immédiate du lemme de groupement par paquets.
2. Vrai : pour tout $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$,
$$\mathbf{P}(XY = \alpha, YZ = \beta) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X = \alpha, Z = \beta | Y = 1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X = -\alpha, Z = -\beta | Y = -1) = \frac{1}{4}.$$
3. Faux : $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1, XY = 0) = 0$ alors que $\mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)\mathbf{P}(XY = 0) \neq 0$.

Exercice 3 Arrondi aléatoire

1. Les sous-ensembles de $\mathcal{S}$ sont en bijection avec $\{0,1\}^m$ (à $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ on associe la suite (x_i) définie par $x_i = 1 \iff S_i \in \mathcal{T}$). On a alors $\operatorname{card} \mathcal{T} = \sum x_i$, et $\mathcal{T}$ est un recouvrement si et seulement si $\sum x_i \mathbf{1}_{S_i} \geqslant \mathbf{1}_U$, d'où l'équivalence.
2. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}[\operatorname{card} T] = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}(S_i \in \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}(X_{i,1} + \cdots + X_{i,k} \geqslant 1) \leqslant \sum_{i=1}^m \mathbf{E}\left[X_{i,1} + \cdots + X_{i,k}\right] \leqslant k \sum_{i=1}^m z_i.$$
Puisque (z_i) minimisent (2) qui est une relaxation de (1), on a $\sum z_i \leqslant \mathrm{OPT}(\mathcal{S})$.
3. On écrit par la borne de l'union
$$\mathbf{P}(\mathcal{T} \text{ n'est pas un recouvrement de } U) \leqslant \sum_{u \in U} \mathbf{P}(A_u)$$
où A_u est l'événement $\{u \notin \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T\}$. On a aussi
$$A_u = \left\{ \sum_{i | u \in S_i} \sum_{j=1}^k X_{i,j} = 0 \right\}.$$
Les v.a. qui apparaissent dans la défintition de A_u sont indépendantes et de loi de Bernoulli. La somme des paramètres vaut $\mu = \sum_{i|u \in S_i} k z_i \geqslant k$. On a donc par l'inégalité de Chernoff II appliquée avec $\varepsilon = 1$,
$$\mathbf{P}(A_u) \leqslant \exp(-\mu/3) \leqslant \exp(-k/3) \leqslant \exp(-c \log(n)/3) = n^{-c/3}.$$
En choisissant $c = 6$, on a bien $\mathbf{P}(\mathcal{T} \text{ n'est pas un recouvrement de } U) \leqslant 1/n$.

Exercice 4 Méthode probabiliste

1. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[R_S(n)] = \mathbf{E}\left[\sum_{1\leqslant i<n/2} \mathbf{1}_{\{i\in S, n-i\in S\}}\right] = \sum_{i\leqslant i<n/2} \mathbf{P}(i\in S, n-i\in S) = \sum_{1\leqslant i<n/2} \mathbf{P}(i\in S)\mathbf{P}(n-i\in S).$$

   A un nombre fini de termes près, cette somme vaut

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} 10\sqrt{\frac{\log(i)}{i}}\cdot 10\sqrt{\frac{\log(n-i)}{n-i}}$$

   L'égalité de l'énoncé implique donc que $\mu_n \simeq 50\pi\log n$.

2. Comme $R_S(n)$ est une somme de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli, on peut écrire par l'inégalité de Chernoff II appliquée avec $\varepsilon = 1/2$,

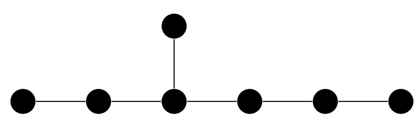
$$\mathbf{P}(A_n^c) \leqslant 2\exp(-\mu_n/12).$$

   Par la question précédente, $\mu_n \geqslant 24\log n$ pour n assez grand, et alors $\mathbf{P}(A_n^c) \leqslant 2\exp(-2\log(n)) = 2n^{-2}$, et donc $\sum \mathbf{P}(A_n^c)$ converge.

3. Par le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement seul un nombre fini des événements A_n est faux. On a donc l'existence d'un ensemble S tel que $c_1\log(n) \leqslant R_S(n) \leqslant c_2\log(n)$ pour n assez grand. Quitte à rajouter à S un nombre fini d'entiers, on peut aussi supposer que $R_S(n) \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$. On peut alors modifier la valeur des constantes c_1 et c_2 pour que l'inégalité voulue soit vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 5 Symétries des graphes aléatoires

0. Par exemple



1. $\operatorname{card} S_x = \sum_{y\neq x} X_{x,y}$ est une somme de $n-1$ v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2, donc par l'inégalité de Chernoff, $\mathbf{P}(\left|\operatorname{card} S_x - \frac{n-1}{2}\right| \geqslant \varepsilon(n-1)) \leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2)$. Choisissons $\varepsilon < 0.01$, alors pour n assez grand $\left|\operatorname{card} S_x - \frac{n-1}{2}\right| \geqslant \varepsilon(n-1)$ implique $\operatorname{card} S_x \in [0.49n, 0.51n]$, et par la borne de l'union on a donc $\mathbf{P}(A^c) \leqslant 2n\exp(-2n\varepsilon^2) \to 0$.

2. $\operatorname{card}(S_x \setminus S_y) = \sum_{z\notin\{x,y\}} X_{x,z}(1-X_{y,z})$ est une somme de $n-2$. v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/4, donc par l'inégalité de Chernoff, pour $\varepsilon \in [0,1]$ on a $\mathbf{P}(\left|\operatorname{card} S_x - \frac{n-2}{2}\right| \geqslant \varepsilon\frac{n-2}{2}) \leqslant 2\exp(-\varepsilon^2(n-2)^2/12)$. On choisissant $\varepsilon < 0.01$, et comme à la question précédente on conclut que $\mathbf{P}(B^c) \leqslant \binom{n}{2}\exp(-\varepsilon^2(n-2)^2/12)$ pour n assez grand.

3. Supposons n impair. On vérifie que γ est une symétrie de G si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\{1,2\}\in E \iff \{2,3\}\in E \iff \cdots \iff \{n,1\}\in E$$
$$\{1,3\}\in E \iff \{2,4\}\in E \iff \cdots \iff \{n,2\}\in E$$
$$\vdots$$
$$\{1,\frac{n+1}{2}\}\in E \iff \{2,\frac{n+1}{2}+1\}\in E \iff \cdots \iff \{n,\frac{n-1}{2}\}\in E$$

   Par indépendance des v.a. $X_{i,j}$, la conjonction de ces $\frac{n-1}{2}$ équivalences a probabilité $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 2^{-(n-1)^2/2}$. Si n est pair, la dernière équivalence est changée en

$$\{1,\frac{n}{2}+1\}\in E \iff \{2,\frac{n}{2}+2\}\in E \iff \cdots \iff \{\frac{n}{2},n\}\in E$$

   et la probabilité que γ est une symétrie de G est alors $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{2^{n/2-1}} = 2^{-n(n-2)/2}$.

4. Soit $V_0 = \{\pi^k(x) \,:\, k \in \mathbf{N}\}$, et $n_0 = \operatorname{card} V_0 \geqslant n/10$. De plus, si π est une symétrie de G, alors $\pi_{|V_0}$ est une symétrie de la restriction de G à V_0. Par la question précédente, cet événement a donc probabilité au plus $2^{-n'(n'-2)/2} \leqslant 2^{-n^2/1000}$ pour n assez grand.
5. Soit B_0 l'événement $\{\operatorname{card}(S_x \setminus S_{\pi(x)}) \geqslant 0.24n\}$. On a $B \subset B_0$. Si B_0 est réalisé, on a $\operatorname{card}(S_x \setminus (W \cup S_{\pi(x)})) \geqslant 0.14n$. Conditionnellement à B_0, les événements $E_{y,z} := \{X_{y,z} = X_{\pi(y),\pi(z)}\}$ pour $y, z \in S_x \setminus (W \cup S_{\pi(x)})$ sont indépendants, et sont réalisés lorsque π est une symétrie de G. On a donc
$$\mathbf{P}(B \cap \{\pi \text{ est une symétrie de } G\}) \leqslant \mathbf{P}\left(B_0 \cap \bigcap_{y,z} E_{y,z}\right) \leqslant 2^{-\binom{0.14n}{2}}$$
comme voulu.
6. Pour toute bijection $\pi : V \to V$ qui n'est pas l'identité, on a par les deux questions précédentes l'estimation $\mathbf{P}(B \cap \{\pi \text{ est une symétrie de } G\}) \leqslant 2^{-c''n^2}$ pour n assez grand, avec $c'' = \min(c, c')$. On peut donc utiliser la borne de l'union
$$\mathbf{P}(\{G \text{ non asymétrique}\}) \leqslant \mathbf{P}(B^c) + \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{Id}\}} \mathbf{P}(\pi \text{ est une bijection de } G) \leqslant \mathbf{P}(B^c) + n! 2^{-c''n^2}$$
qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.