ENS LYON — Informatique
L3 Probabilités

Examen partiel du 21 mars 2018
Durée : 2 heures

Exercice 1 Question de cours

Démontrer la version suivante de l'inégalité de Chernoff : si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, alors pour tout $a \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \geqslant \frac{n}{2} + a\right) \leqslant \exp(-2a^2/n).$$

On pourra utiliser sans justification l'inégalité $\cosh(t) \leqslant \exp(t^2/2)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

On rappelle une autre version de l'inégalité : si Y est une somme de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli, et $\mu = \mathbf{E}[Y]$, alors pour tout $\varepsilon \in [0,1]$,

$$\max\Big(\mathbf{P}(Y \geqslant (1+\varepsilon)\mu), \mathbf{P}(Y \leqslant (1-\varepsilon)\mu\Big) \leqslant \exp(-\mu\varepsilon^2/3).$$

Exercice 2 Indépendance

Soient X, Y, Z des v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. XY et Z sont indépendantes.
2. XY et YZ sont indépendantes.
3. X, Y et XY sont indépendantes.

Exercice 3 Arrondi aléatoire

Soit U un ensemble à n éléments. On appelle recouvrement de U un ensemble $\mathcal{S} = (S_1, \cdots, S_m)$ de parties de U qui vérifie $\bigcup S_i = U$. Étant donné $\mathcal{S}$ un recouvrement de U, on note $\mathrm{OPT}(\mathcal{S})$ le cardinal minimal d'un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ qui est encore un recouvrement de $\mathcal{S}$.

1. Expliquer rapidement pourquoi $\mathrm{OPT}(\mathcal{S})$ est la solution du problème d'optimisation suivant

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \quad \text{sous les contraintes} \quad x_i \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{1}_{S_i} \geqslant \mathbf{1}_U \tag{1}$$

On considère le problème suivant qui est une relaxation de (1)

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{m} z_i \quad \text{sous les contraintes} \quad z_i \in [0,1] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} z_i \mathbf{1}_{S_i} \geqslant \mathbf{1}_U \tag{2}$$

Alors que le problème (1) est NP-difficile, le problème (2) peut être résolu en temps polynomial par les méthodes de programmation linéaire.

2. Soit k un entier, et $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ qui minimisent (2). Soient $(X_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k}$ des variables aléatoires indépendantes vérifiant $\mathbf{P}(X_{i,j} = 1) = z_i$, $\mathbf{P}(X_{i,j} = 0) = 1 - z_i$. On définit un sous-ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ par la condition
$$S_i \in \mathcal{T} \iff \exists j \in \{1, \dots, k\} \,:\, X_{i,j} = 1.$$
Montrer que
$$\mathbf{E}[\operatorname{card} \mathcal{T}] \leqslant k \ \mathrm{OPT}(\mathcal{S}).$$
3. Déterminer une valeur de $c > 0$ telle que, si on pose $k = \lfloor c \log n \rfloor$, on ait
$$\mathbf{P}(\mathcal{T} \text{ est un recouvrement de } U) \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 4 Méthode probabiliste

Soit $S \subset \mathbf{N}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $R_S(n)$ comme le nombre de manières d'écrire n comme somme de deux éléments distincts de S :

$$R_S(n) = \mathrm{card}\{(i,j) \in S^2 \,:\, i < j,\ i + j = n\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'un ensemble $S \subset \mathbf{N}$ et de constantes strictement positives c_1, c_2 tels que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$c_1 \log(n) \leqslant R_S(n) \leqslant c_2 \log(n). \tag{3}$$

Pour cela on définit un sous-ensemble $S \subset \mathbf{N}$ aléatoire en décrétant que les événements $\{n \in S\}_{n\in\mathbf{N}}$ sont indépendants et vérifient $\mathbf{P}(n \in S) = \begin{cases} 10\sqrt{\log(n)/n} & \text{si } n \geqslant 1000 \\ 1 & \text{si } n < 1000. \end{cases}$

1. On note $\mu_n = \mathbf{E}[R_S(n)]$. Vérifier que μ_n est équivalent à $50\pi \log n$ quand n tend vers l'infini. On pourra utiliser sans justification la formule
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{\log(t)\log(n-t)}{t(n-t)}} = \pi \log n$$
2. Soit A_n l'événement $\{\frac{\mu_n}{2} \leqslant R_S(n) \leqslant \frac{3\mu_n}{2}\}$. Montrer que $\sum \mathbf{P}(A_n^c) < +\infty$.
3. En déduire l'existence d'un ensemble $S \subset \mathbf{N}$ vérifiant (3).

Exercice 5 Symétries des graphes aléatoires

Soit $G = (V, E)$ un graphe (non orienté, sans boucle ni arête multiple). On dit qu'une bijection $\pi : V \to V$ est une *symétrie* de G si

$$\{x, y\} \in E \iff \{\pi(x), \pi(y)\} \in E\ .$$

On dit que G est *asymétrique* si sa seule symétrie est l'identité.

0. Donner un exemple de graphe asymétrique.

On suppose que $G = (V, E)$ est un graphe aléatoire d'Erdős-Rényi de loi $G_{n,\frac{1}{2}}$. Autrement dit, $V = [n] = \{1, \ldots, n\}$ et $E = \{\{i, j\} \,:\, X_{i,j} = 1\}$, où les v.a. $(X_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(G \text{ est asymétrique}) = 1. \tag{4}$$

1. Pour $x \in V$, on note $S_x = \{y \in V \,:\, \{x, y\} \in E\}$ l'ensemble des voisins de x. Soit A l'événement « $\forall x \in V,\ 0.49n \leqslant \mathrm{card}(S_x) \leqslant 0.51n$ ». Montrer que $\mathbf{P}(A)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
2. Soit B l'événement « $\forall x \neq y \in V,\ 0.24n \leqslant \mathrm{card}(S_x \setminus S_y) \leqslant 0.26n$ ». Montrer que $\mathbf{P}(B)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
3. Soit $\gamma : V \to V$ définie par $\gamma(k) = k + 1$ si $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, et $\gamma(n) = 1$. Calculer la probabilité que γ soit une une symétrie de G.

Pour $x \in V$ et $\pi : V \to V$ une bijection, on note $I_\pi(x) = \mathrm{card}\{\pi^k(x) \,:\, k \in \mathbf{N}\}$.

4. Soit $\pi : V \to V$ une bijection, et $x \in V$ tel que $I_\pi(x) \geqslant n/10$. En adaptant le calcul de la question 3., montrer que pour n assez grand
$$\mathbf{P}(\pi \text{ est une symétrie de } G) \leqslant 2^{-cn^2}$$
où $c > 0$ est une constante à préciser.
5. Soit $\pi : V \to V$ une bijection, et $x \in V$ tel que $2 \leqslant I_\pi(x) < n/10$. Montrer que
$$\mathbf{P}(B \cap \{\pi \text{ est une symétrie de } G\}) \leqslant 2^{-c'n^2}$$
où $c' > 0$ est une constante à préciser.
Indication. *Si on note* $W = \{\pi^k(x) \,:\, k \in \mathbf{N}\}$, *considérer les événements* $\{X_{y,z} = X_{\pi(y),\pi(z)}\}$ *pour* y *et* z *dans* $S_x \setminus (W \cup S_{\pi(x)})$.
6. Démontrer (4).