ENS LYON
L3 Probabilités

Probabilités, L3 Informatique Fondamentale

Examen final
27 mai 2024
Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 Méthode probabiliste

Soit $G = (V, E)$ un graphe. A l'aide de la méthode probabiliste, montrer qu'il existe une partition $V = V_1 \cup V_2$ telle que le nombre d'arêtes reliant un sommet de V_1 à un sommet de V_2 est $\geqslant |E|/2$.

Exercice 2 Tour

Une tour se déplace sur un échiquier de 8×8 cases uniformément au hasard (depuis la case de coordonnées (x, y), elle peut se déplacer sur une des cases de l'ensemble $\{(x', y) \mid x' \neq x\} \cup \{(x, y') \mid y' \neq y\}$). Au bout de combien de déplacements en moyenne revient-elle à la case de départ ?

Exercice 3 Marche aléatoire sur l'hypercube

On considère le graphe de l'hypercube : l'ensemble des sommets est $V = \{0, 1\}^d$, et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si ils diffèrent en une seule coordonnée.

1. On considère la marche aléatoire sur ce graphe, de matrice de tranisition P. Est-elle irréductible ? Apériodique ? Quelle est la mesure invariante ?
2. On considère la chaîne de Markov (X_n) qui est la version paresseuse de la marche aléatoire, donnée par la matrice de transition $Q = \frac{I+P}{2}$. Étant donnés $v = (v_1, \ldots, v_d) \in V$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on note
$$T_{i \to \varepsilon}(v) = (v_1, \ldots, v_{i-1}, \varepsilon, v_{i+1}, \ldots, v_d).$$
Vérifier que si i et ε sont choisis indépendamment selon la loi uniforme, alors $T_{i \to \varepsilon}(X_n)$ a même loi que X_{n+1}.
3. A l'aide de la question précédente, définir un couplage pour la chaîne de Markov (X_n) permettant d'estimer son temps de mélange lorsque $d \gg 1$ en se ramènant à un problème étudié en cours.

Exercice 4 Stables d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, sans boucle ni arête multiple. Un sous-ensemble $W \subset V$ est un *stable* (ou un indépendant) s'il ne contient pas deux sommets adjacents. On note S l'ensemble des stables de G. On définit une chaîne de Markov (X_n) d'espace d'états S de la manière suivante. Si (X_n) est un stable, on tire uniformément au hasard un sommet $v \in V$, puis

— si $v \in X_n$, on pose $X_{n+1} = X_n \setminus \{v\}$,
— si $v \notin X_n$,
  — si $X_n \cup \{v\}$ est un stable, on pose $X_{n+1} = X_n \cup \{v\}$,
  — sinon, on pose $X_{n+1} = X_n$.

0. On considère un cas particulier : le graphe de sommets $\{a, b, c\}$ ayant uniquement les deux arêtes (a, b) et (b, c). Donner explicitement la chaîne de Markov définie précédemment, soit par sa matrice de transition, soit par sa représentation graphique.

On revient au cas général.

1. Montrer que la chaîne de Markov est irréductible.
2. Montrer que, en dehors d'un cas trivial que l'on identifiera, la chaîne de Markov est apériodique.
3. Montrer que la probabilité uniforme sur S est invariante.
4. Soit Δ le degré maximal d'un sommet de G. On fixe un entier $k \leqslant \frac{|V|}{3(\Delta+1)}$ et on note S_k l'ensemble des stables de G de cardinal k. Adapter la construction précédente pour définir une chaîne de Markov apériodique irréductible dont la probabilité invariante est la loi uniforme sur S_k.

Exercice 5 Marche aléatoire sur un cercle

Soit $p > 1$ un entier.

1. Soit (X_n) la chaîne de Markov d'espace d'états $\{1, \ldots, p\}$ et de matrice de transisition donnée par
$$Q(1,1) = 1,\ Q(p,p) = 1,\ Q(i,i-1) = Q(i,i+1) = \frac{1}{2}$$
si $1 < i < p$, les autres coefficients étant nuls. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, calculer
$$\mathbf{P}(X_n = 1 \text{ pour } n \text{ assez grand} \mid X_0 = i).$$
On pourra remarquer que $\mathbf{E}[X_{n+1}] = \mathbf{E}[X_n]$.

2. Soit G le graphe circulaire à p sommets (c'est à dire, le graphe de sommets $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, le sommet i étant relié aux sommets $i-1$ et $i+1$ modulo p). On considère la marche aléatoire issue du point 0.
   (a) Déterminer la probabilité que le dernier sommet visité par la marche aléatoire soit le point 1.
   (b) Quelle est la loi du dernier sommet visité ?

Exercice 6 Graphe aléatoire géométrique

Soient $p_1, \ldots, p_n$ des points choisis indépendamment selon la loi uniforme dans le carré $[0,1]^2$. Autrement dit, on a $p_i = (x_i, y_i)$ et les $2n$ variables aléatoires $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ sont i.i.d. de loi uniforme dans $[0,1]$. Pour $0 < r < 1$, on construit un graphe $G(n,r) = (V,E)$ de sommets $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$ en reliant les sommets p_i et p_j (pour $i \neq j$) lorsque les carrés de côté r centrés en p_i et p_j s'intersectent.

1. (a) On note $I \subset V$ l'ensemble des points qui sont isolés dans $G(n,r)$ et à distance au moins r du bord du carré $[0,1]^2$. Montrer que
$$\mathbf{P}(p_1 \in I) = (1-r)^2(1-r^2)^{n-1}$$
$$\mathbf{P}(p_2 \in I \mid p_1 \in I) \leq \left(1 - \frac{r^2}{1-r^2}\right)^{n-2}$$
   (b) A l'aide d'estimations sur $\mathbf{E}[|I|]$ et $\mathbf{E}[|I|^2]$, en déduire que pour une constante c à préciser,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(G(n, c\sqrt{\log(n)/n}) \text{ est connexe}\right) = 0$$

2. (a) Soit $k = \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}} \right\rfloor$. On partitionne le carré $[0,1]^2$ en k^2 petits carrés de côté $1/k$ dénotés $(A_i)_{1 \leq i \leq k^2}$. Montrer que $\mathbf{P}(\forall i, A_i \cap V \neq \emptyset)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
   (b) En déduire que, pour une constante C à préciser,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(G(n, C\sqrt{\log(n)/n}) \text{ est connexe}\right) = 1$$