Examen partiel
19 novembre 2025

On pourra utiliser les variantes suivantes des inégalités de CHERNOFF.

(I) Si X est la somme de n variables aléatoires i.i.d. de loi de BERNOULLI de paramètre 1/2, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbf{P}(X \geqslant \frac{n}{2} + a) \leqslant \exp(-2a^2/n)$$

$$\mathbf{P}(X \leqslant \frac{n}{2} - a) \leqslant \exp(-2a^2/n)$$

(II) Si X est une somme de variables aléatoires indépendantes ayant chacune une loi de BERNOULLI, alors en posant $\mu = \mathbf{E}[X]$, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbf{P}(X \leqslant (1-\delta)\mu) \leqslant \exp\left(-\delta^2\mu/2\right)$$

$$\mathbf{P}(X \geqslant (1+\delta)\mu) \leqslant \exp\left(-\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu\right)$$

Exercice 1 Dans l'ascenseur

Un groupe de n personnes rentre dans un ascenseur situé au rez-de-chaussée d'un immeuble à k étages. Chaque personne appuie sur un des boutons 1 à k aléatoirement, indépendamment, selon la loi uniforme sur $\{1, \dots, k\}$. Quelle est l'espérance du nombre d'arrêts que fera l'ascenseur ?

Exercice 2 Records d'une permutation aléatoire

Pour un entier n, soit σ_n une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n\}$, choisie uniformément parmi les $n!$ permutations possibles. On dit que $i \in \{1, \dots, n\}$ est un record de σ_n si on a $\sigma_n(j) < \sigma_n(i)$ pour tout $j < i$. On note A_i l'événement « i est un record de σ_n ».

1. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\mathbf{P}(A_i)$.
2. Montrer que les événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendants.
3. On note $R(\sigma_n)$ le nombre de records de σ_n. Montrer que

$$\mathbf{P}(R(\sigma_n) \geqslant 3\log n + 3) \leqslant \frac{1}{n}$$

   On pourra utiliser l'inégalité $\log n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \log n + 1$

Exercice 3 Analyse plus fine de Randomized Quicksort

On étudie plus en détail l'algorithme Randomized Quicksort vu en cours pour montrer que le temps d'exécution pour trier un ensemble S de cardinal n est $O(n \log n)$ avec grande probabilité.

Quand un pivot est choisi aléatoirement au sein d'un ensemble $S' \subset S$, on dit que le choix est *chanceux* si le pivot p partage $S' \setminus \{p\}$ en deux sous-ensembles de cardinal $\leqslant \frac{2}{3}|S'|$, et *malchanceux* sinon.

1. Montrer que la probabilité qu'un choix de pivot soit chanceux est $\geqslant 2/3$.
2. Dans une suite de N choix de pivots indépendants, soit X_N le nombre de choix chanceux. Montrer avec une inégalité de CHERNOFF que

$$\mathbf{P}(X_N \leqslant N/2) \leqslant \exp(-cN)$$

   pour une constante $c > 0$ à déterminer.
3. Soit $x \in S$. Montrer qu'au cours de toute exécution de l'algorithme Quicksort (aléatoire ou déterministe), parmi les choix de pivots effectués dans un ensemble contenant x, au plus $C\log(n)$ sont chanceux (pour une constante C à déterminer).
4. Conclure que le temps d'exécution de l'algorithme Randomized Quicksort est $O(n \log n)$ avec grande probabilité.

Exercice 4 MAX-CUT

Soit $G = (V, E)$ un graphe (non-orienté, sans boucle ni arête multiple). Pour $A \subset V$, on note $\mathrm{Cut}(A)$ la coupe selon A, c'est à dire l'ensemble des arêtes reliant un sommet de A à un sommet de $V \setminus A$. On considère la coupe maximale de G définie comme

$$\mathrm{MAXCUT}(G) = \max_{A \subset V} |\mathrm{Cut}(A)|$$

(on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X).

1. Montrer par la méthode probabiliste l'inégalité $\mathrm{MAXCUT}(G) \geqslant |E|/2$.

On considère l'algorithme glouton suivant pour approximer $\mathrm{MAXCUT}(G)$ (on suppose que l'ensemble V des sommets de G est muni d'un ordre total). On note $\mathrm{GreedyMAXCUT}(G)$ le cardinal de la coupe produite par cet algorithme. Il est évident que $\mathrm{GreedyMAXCUT}(G) \leqslant \mathrm{MAXCUT}(G)$.

$A \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \emptyset$
Pour i **dans** V
  Soit a_i le nombre de voisins de i dans A et b_i le nombre de voisins de i dans B
  Si $a_i > b_i$ **alors** $B \leftarrow B \cup \{i\}$
  Sinon, $A \leftarrow A \cup \{i\}$
Renvoyer la coupe selon A.

---

2. A l'aide de cet algorithme, donner une autre preuve de l'inégalité $\mathrm{MAXCUT}(G) \geqslant |E|/2$.
3. On considère le graphe H_n de sommets $\{1, \ldots, 2n\}$ et ayant pour arêtes

   $$\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\} \text{ ; ainsi que } \{i, j\} \text{ pour tous } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } j \in \{n+1, \ldots, 2n\}.$$

   Montrer que le rapport $\mathrm{MAXCUT}(H_n)/\mathrm{GreedyMAXCUT}(H_n)$ tend vers 2 quand n tend vers l'infini.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que G_n est un graphe aléatoire de loi $\mathsf{G}(n, 1/2)$, c'est-à-dire qu'il a pour ensemble de sommets $\{1, \ldots, n\}$ et que chaque arête est présente indépendamment avec probabilité $1/2$.

4. Pour $A \subset \{1, \ldots, n\}$, quelle est la loi de $|\mathrm{Cut}(A)|$?
5. Montrer que pour une constante C à déterminer,

   $$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\mathrm{MAXCUT}(G_n) \leqslant \frac{n^2}{8} + Cn^{3/2}\right) = 1$$

   Indication. *On pourra combiner une inégalité de* Chernoff *avec la borne de l'union.*
6. Soit k un entier. Soient X et Y deux variables i.i.d. de loi $\mathsf{B}(k, 1/2)$.
   (a) Calculer $\mathbf{E}(X - Y)^2$ et $\mathbf{E}(X - Y)^4$.
   (b) En déduire que $\mathbf{E}[|X - Y|] \geqslant c_1\sqrt{k}$ pour une constante $c_1 > 0$.
   Indication. *On pourra démontrer et utiliser l'inégalité* $\mathbf{P}\left(Z \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{E}[Z]\right) \geqslant \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{E}[Z])^2]}{\mathbf{E}[Z^2]}$ *valable pour une v.a.* Z *à valeurs positives.*
7. Montrer que si A et B sont des v.a. indépendantes de lois respectives $\mathsf{B}(a, 1/2)$ et $\mathsf{B}(b, 1/2)$, alors

   $$\mathbf{E}[\max(A, B)] \geqslant \frac{a + b}{4} + c_2\sqrt{a + b}$$

   pour une constante $c_2 > 0$.
8. En déduire que pour une constante $c_3 > 0$

   $$\mathbf{E}[\mathrm{GreedyMAXCUT}(G_n)] \geqslant \frac{n^2}{8} + c_3 n^{3/2}.$$