Examen partiel
2 avril 2025

On pourra utiliser les variantes suivantes des inégalités de Chernoff.

(I) Si X est la somme de n variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbf{P}(X \geqslant \frac{n}{2} + a) \leqslant \exp(-2a^2/n)$$

$$\mathbf{P}(X \leqslant \frac{n}{2} - a) \leqslant \exp(-2a^2/n)$$

(II) Si X est une somme de variables aléatoires indépendantes ayant chacune une loi de Bernoulli, alors en posant $\mu = \mathbf{E}[X]$, pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant 2\exp(-\mu\varepsilon^2/3)$$

Exercice 1 Moments et déviations

1. Soit X une variable aléatoire d'espérance nulle et admettant un moment d'ordre k, où k est un entier pair. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbf{P}\left(|X| > t\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}[X^k]}{t^k} .$$

2. Soit (Y_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{E}[Y_i] = 0$, $\mathbf{E}[Y_i^2] = 1$ et $\mathbf{E}[Y_i^4] \leqslant 3$. On pose $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $s > 0$,

$$\mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant s\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{3}{s^4}$$

Exercice 2 Urnes et boules

Considérons une urne contenant initialement 2 boules : une rouge et une verte. On répète la procédure suivante jusqu'à ce que l'urne contienne n boules : à chaque étape, on tire une boule depuis l'urne, uniformément au hasard, et on la remet dedans ainsi qu'une nouvelle boule de la même couleur. Montrer que le nombre final de boules rouges suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n-1\}$.

Exercice 3 Coupe d'un graphe aléatoire en deux parties égales

Soit n un entier pair et soit $G = (V, E)$ un graphe (non orienté, sans boucle ni arête multiple) aléatoire de loi $\mathsf{G}(n, 1/2)$, c'est-à-dire que les événements $(A_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ définis par

$$A_{ij} = \text{« l'arête } \{i, j\} \text{ est dans } E \text{ »}$$

sont indépendants et de probabilité 1/2.

1. Soit $W \subset V$ un sous-ensemble de cardinal $n/2$. On note X_W le nombre d'arêtes reliant un élément de W à un élément de $V \setminus W$. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire X_W.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_W \in \left[(1-\delta)\frac{n^2}{8}, (1+\delta)\frac{n^2}{8}\right] \text{ pour tout } W \subset V \text{ de cardinal } n/2\right) = 1.$$

Exercice 4 Version récursive de l'algorithme de Karger

1. Soit T un arbre binaire complet de hauteur h (c'est-à-dire ayant 2^h feuilles, voir Figure 1). On colorie chacun des sommets indépendemment en rouge ou en bleu avec probabilité $1/2$. On note $P(h)$ la probabilité qu'il existe un chemin de la racine à une feuille dont toutes les sommets soient rouges (en particulier, on a $P(0) = \frac{1}{2}$).
   (a) Donner une relation de récurrence reliant $P(h+1)$ à $P(h)$.
   (b) En déduire que $P(h) \geqslant \frac{1}{h+2}$ pour tout $h \geqslant 0$.

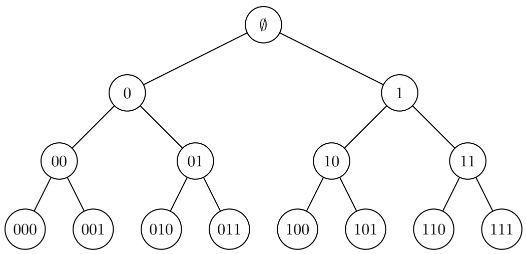

Figure 1 – Un arbre binaire de hauteur 3

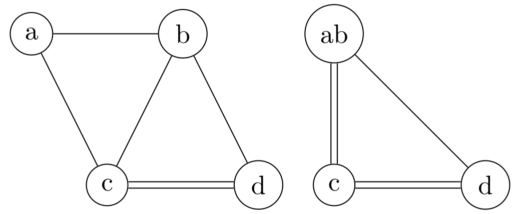

Figure 2 – Un graphe G (à gauche) et sa contraction G/e pour $e = \{a, b\}$ (à droite)

Dans cet exercice, on considère des graphes non orientés, sans boucle, ayant éventuellement des arêtes multiples. Une *coupe* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subset E$ tel que le graphe $(V, E \setminus C)$ n'est pas connexe. On note $\mathrm{mincut}(G)$ le cardinal minimal d'une coupe de G. On décrit une variante récursive de l'algorithme de Karger pour calculer $\mathrm{mincut}(G)$.

Étant donnée une arête $e = \{x, y\} \in E$, la contraction de G selon e, notée G/e, est le graphe obtenu en identifiant les sommets x et y (pour obtenir un nouveau sommet noté xy), en remplaçant les arêtes $\{x, z\}$ ou $\{y, z\}$ par $\{xy, z\}$ et en effaçant les boucles éventuellement créées.

2. On pose $n = |V|$ et on fixe une coupe C_0 telle que $|C_0| = \mathrm{mincut}(G)$. On considère une suite de graphes définie par $G_1 = G$ et (pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$) $G_{i+1} = G_i/e_i$ où l'arête e_i est choisie uniformément parmi les arêtes de G_i, tous les choix étant indépendants. Soit A_i l'événement «l'arête e_i choisie à la $i$ème étape est dans C_0» et $B_i = \overline{A_i}$.
   (a) Montrer que $\mathbf{P}(A_1) \leqslant \frac{2}{n}$,
   (b) Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-2$
   $$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_i) \geqslant \frac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)},$$
   (c) En déduire que si $i \leqslant n - \frac{n}{\sqrt{2}}$, alors $\mathbf{P}(\mathrm{mincut}(G_{i+1}) = \mathrm{mincut}(G)) \geqslant \frac{1}{2}$.

Considérons l'algorithme suivant

Algorithm 1 KargerStein(G) où G est un graphe à n sommets

Si $n < 6$, calculer $\mathrm{mincut}(G)$ par recherche exhaustive.
Si $n \geqslant 6$,
  pour i de 1 à 2,
    Contracter aléatoirement des arêtes de G jusqu'à obtenir un graphe G^i ayant $\leqslant \frac{n}{\sqrt{2}} + 1$ sommets puis calculer récursivement $X_i = \mathrm{KargerStein}(G^i)$.
  Renvoyer $\min(X_1, X_2)$.

3. Montrer que cet algorithme calcule la valeur correcte de $\mathrm{mincut}(G)$ avec probabilité $\Omega(\frac{1}{\log n})$.
4. Donner un algorithme probabiliste calculant $\mathrm{mincut}(G)$ avec probabilité d'erreur $\leqslant 2^{-100}$. Quelle est sa complexité ? On admettra que l'opération de contraction d'une arête aléatoire dans un graphe à n sommets peut s'effectuer en temps $O(n)$.