Partiel du 12/03/2026 - Correction

Ex. 1 1) $V = A_0 + F$ où $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

2) Notons G l'ensemble en question.

- Si $n = 1$ alors $G = \{(1)\}$ est sous-espace affine de $M_1(\mathbb{R})$.
- Supposons $n \geqslant 2$ et montrons que G n'est pas un s.e.a de $M_n(\mathbb{R})$

Soient $A = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1)$ et $B = \mathrm{Diag}(2, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1)$ deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont donnés par le n-uplet. On a $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $C = \frac{1}{2}(A+B)$ le milieu du segment $[A\ B]$. Alors $C = \mathrm{Diag}(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 1, \dots, 1)$ et $\det(C) = \frac{9}{8} \neq 1$ donc $C \notin G$. En résumé, on a :

$C = A + \overrightarrow{AC} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc si G était un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$ on aurait $C \in G$.

Ex. 2.

1) Notons $s = \alpha + \beta + \gamma$. Soit $O \in \mathcal{E}$. Soient $M, N \in \mathcal{E}$.

On a : $(s+1)\overrightarrow{Of_\sigma(M)} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM}$ (1)

$(s+1)\overrightarrow{Of_\sigma(N)} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON}$ (2)

On retranche (1) à (2) et on obtient : $(s+1)\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$

2) Par (1) on a : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \ell(\overrightarrow{MN})$ où $\ell = \frac{1}{s+1}\mathrm{Id}_E$

Ainsi f est affine et sa partie linéaire est $\vec{f} = \frac{1}{s+1}\mathrm{Id}_E$

- Si $s = 0$ alors f est une translation
- si $s \neq 0$ alors f est une homothétie de rapport $\frac{1}{s+1}$

3) Soit $M \in \mathcal{E}$. On a, par définition de $f_\sigma(M)$,

$(s+1)\overrightarrow{Mf(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

On se place dans le cas $s = 0$ ie f_σ est une translation et on se donne $\vec{v} \in E$. On cherche $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma)$ t.q. $\forall M \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \overrightarrow{Mf(M)} &= \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} \\
&= \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0}\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Ainsi : f_σ est la translation de vecteur $\vec{v}$

$$\iff \vec{v} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \alpha = -\beta - \gamma$$

Finalement il existe bien $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma)$ tq $f_\sigma = t_{\vec{v}}$ et ce σ est unique : en effet, β, γ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\alpha = -\beta - \gamma$.

4) Soient $I \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Supposons que $f_\sigma = h_{I,\lambda}$.

  Alors $\overrightarrow{f_\sigma} = \frac{1}{s+1} Id_E = \lambda \, Id_E$ ie $\frac{1}{s+1} = \lambda$

  ie $s = \frac{1}{\lambda} - 1$.

  On a : $f(I) = h_{I,\lambda}(I) = I \iff \begin{pmatrix} A & B & C & I \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} = I$

  Ici $s = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$, soit alors $G = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. La relation précédente devient $\begin{pmatrix} G & I \\ s & 1 \end{pmatrix} = I$. Cette égalité équivaut à $G = I$ (sinon $\begin{pmatrix} G & I \\ s & 1 \end{pmatrix}$ est point de la droite (GI) distinct de I).

  Finalement : $f_\sigma(I) = I \iff I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

  On a donc $(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{AI} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$

  ie $\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \overrightarrow{AI} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$

  Cette égalité montre que le couple (β, γ) est uniquement déterminé et α est déterminé par : $\alpha = s - \beta - \gamma = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) - \beta - \gamma$

  Donc si σ existe, il est unique.

- Réciproquement soit $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tq $\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \overrightarrow{AI} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$ et $\alpha = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) - \beta - \gamma$.

  Alors $f_\sigma(I) = I$ et $\overrightarrow{f_\sigma} = \frac{1}{s+1} Id_E = \lambda \, Id_E$ et f_σ sera l'homothétie voulue

En conclusion, comme dans la question 2, $\exists! \, \sigma \in \mathbb{R}^3$ tq $f_\sigma = h_{I,\lambda}$.

Ex. 3

1) $\mathcal{D}_1 \not\parallel \mathcal{D}_2$ signifie que $D_1 \neq D_2$. Par conséquent, $D_1 + D_2 \supsetneq D_1$ donc $\dim(D_1 + D_2) \geq 2$ donc $D_1 + D_2 = E$. Décomposons $\overrightarrow{A_1A_2} = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in D_1$ et $v_2 \in D_2$. Soit $O = A_1 + v_1$. On a alors :

$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = -v_1 + (v_1 + v_2) = -v_2$.

Ainsi $O \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. De plus $D_1 \cap D_2 = \{0\}$ (Grassmann) et $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = O + D_1 \cap D_2 = O + \{\vec{0}\} = \{O\}$

2) . $(\overrightarrow{CB})$ est une base de $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{CB}\}$ qui est la direction de (BC) et comme $C, P \in (BC)$, $\overrightarrow{CP} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{CB}\}$ d'où l'existence et l'unicité de $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CB}$.

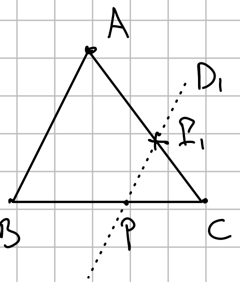
. Soit $O \in \mathcal{E}$. On a : $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{CO} + \lambda \overrightarrow{OB}$

d'où $1.\overrightarrow{OP} = 0 \times \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}$

(avec $0 + \lambda + (1-\lambda) = 1$) donc $P = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Ainsi $(0, \lambda, 1-\lambda)$ sont les coordonnées barycentriques demandées

3) (a)

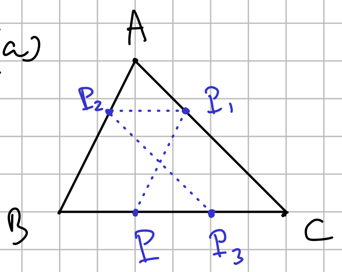


Par 1) $\mathcal{D}_1 \cap (CA)$ est un singleton.

Par Thalès : $\overrightarrow{CP_1} = \lambda \overrightarrow{CA}$.

b) Comme dans la question 2), on obtient $P_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \lambda & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

4) (a)



(b) On a : $\overrightarrow{CP_1} = \lambda \overrightarrow{CA}$ d'où

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP_1} = \lambda \overrightarrow{CA}$ ie $\overrightarrow{AP_1} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}$

Par Thalès : $\overrightarrow{AP_2} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB}$

d'où $P_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \lambda & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}$

On fait de même avec P_3 et on trouve (sans les détails)

$P_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

4) (a) Ce qui précède permet d'écrire :

$$\overrightarrow{CP_3} = 0 \cdot \overrightarrow{CA} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{CB} + \lambda\,\overrightarrow{CC} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{CB}$$

Ainsi $f(P) = P \iff \lambda = 1-\lambda \iff \lambda = \frac{1}{2} \iff P = m[BC]$

(b) En gardant les notations précédentes on a :

$$f(f(P)) = f(P_3) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 1-(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = P$$

ie $f \circ f = Id_{(BC)}$