Chapitre 1

Géométrie affine

On travaille sur un corps $\mathbf{K}$. Dans la plupart des cas, ce sera $\mathbf{R}$ mais on pourra parfois considérer d'autres corps comme $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ ou les corps finis. Tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbf{K}$ et de dimension finie.

1.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Avant de définir les espaces affines abstraits, revenons sur le cas plus concret des sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel. Pour tout x dans E, la translation de vecteur x est l'application $\tau_x : E \to E$ définie par $y \mapsto x + y$. L'application τ_x est bijective et $\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$. Elle est linéaire uniquement dans le cas $x = 0$. On a de plus $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$: l'ensemble des translations forme un groupe isomorphe à $(E, +)$.

On dit qu'une partie $\mathcal{F} \subset E$ est un *sous-espace affine* (s.e.a.) s'il existe $x \in E$ et un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tels que

$$\mathcal{F} = \tau_x(F) = x + F = \{x + y \ : \ y \in F\}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement $x \in \mathcal{F}$ puisque $0 \in F$. Si x_1 et x_2 sont dans $\mathcal{F}$, alors $x_1 - x_2 \in F$: on retrouve F comme l'ensemble des différences entre éléments de $\mathcal{F}$. En particulier, le sous-espace vectoriel F est unique. On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de direction F passant par x. Bien sûr, x n'est pas uniquement déterminé par cette condition : pour tout x' dans $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = x' + F$.

Si (E_i) est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de V, leur intersection $\bigcap E_i$ est aussi un sous-espace vectoriel. On peut donc définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie $A \subset V$, noté $\mathrm{Vect}(A)$, comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces vectoriels contenant A.

Un sous-espace vectoriel $E \subset V$ est stable par combinaisons linéaires : pour des familles finies $(x_i)_{i \in I}$ dans E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{K}$ on a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in E$$

(cela se démontre par récurrence sur $|I|$; pour $|I| = 2$ c'est la définition de sous-espace vectoriel). Les combinaisons linéaires permettent d'expliciter la notion d'espace vectoriel engendré : pour $A \subset V$, on a

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \ : \ I \text{ fini }, \lambda_i \in \mathbf{K}, x_i \in A \right\}$$

puisque le membre de droite forme un sous-espace vectoriel qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.

De la même manière, on peut définir le sous-espace affine engendré par une partie $A \subset V$. On pourrait rester dans le cadre "concret" des sous-espaces affines d'un espace vectoriel, mais pour des applications ultérieures il est utile de disposer d'une notion abstraite d'espace affine.

1.2 Espaces affines abstraits

Dans l'exemple d'un sous-espace affine $\mathcal{F} = x + F \subset E$ du paragraphe précédent, les points (les éléments du sous-espace affine $\mathcal{F}$) et les vecteurs (les éléments du sous-espace vectoriel F) sont tous deux inclus dans E. Dans la définition d'un espace affine abstrait, ce n'est pas le cas ; il n'est pas possible de définir $2M$ où $M + N$ pour des points M, N de $\mathcal{F}$.

[faire un dessin]

Rappelons le vocabulaire des actions de groupes. Une action d'un groupe G (d'élément neutre e) sur un ensemble X est la donnée d'une fonction $\mu : G \times X$ dans X qui vérifie les axiomes $\mu(e, x) = x$ et $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ pour tous g, h dans G et $x \in X$. Il est habituel d'écrire $g \cdot x$ plutôt que $\mu(g, x)$, voire $x + g$ lorsque le groupe G est abélien.

On dit qu'une action est *simplement transitive* si pour tous x, y dans X, il existe un unique $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Autrement dit, pour tout x dans X, l'application $g \mapsto g \cdot x$ est une bijection de G sur X.

Définition. On appelle *espace affine* la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une action simplement transitive de $(E, +)$ sur $\mathcal{E}$, où E est un espace vectoriel. On dit que E est la direction de $\mathcal{E}$. On appelle dimension de $\mathcal{E}$ la dimension de E. On appelle droite affine un espace affine de dimension 1, plan affine un espace affine de dimension 2.

Dans ce contexte, les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les points et sont habituellement notés par des lettres majuscules $A, B, C, M, \ldots$. Les éléments de E sont appelés les vecteurs et habituellement notés par des symboles comme $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$. L'action est notée additivement : $A + \overrightarrow{u}$ est un point.

Exemple. L'action de $(E, +)$ sur E par translation $\mu(x, y) = x + y$ est simplement transitive (comme pour tout groupe) : tout espace vectoriel peut donc être vu comme un espace affine.

Étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$, on note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de E tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$. L'axiome d'action de groupe donne immédiatement la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On a également $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Un espace affine est un espace vectoriel qui a oublié son origine. On a vu que tout espace vectoriel peut naturellement être vu comme un espace affine. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur E, tout choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ induit une bijection $\mathcal{E} \to E$

$$M \to \overrightarrow{OM}$$

On peut via cette bijection munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace vectoriel (le «vectorialisé en O»), dans lequel le zéro est O, mais ce choix n'est pas canonique. Dans les preuves, on commence souvent par choisir une origine O pour remplacer tous les points M par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$.

On appelle *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ l'orbite d'un sous-espace vectoriel de E, c'est à dire un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{F} = \{M + \overrightarrow{u} \ : \ \overrightarrow{u} \in F\}$$

où $M \in \mathcal{E}$ et F un sous-espace vectoriel de E. On a alors

$$F = \{\overrightarrow{AB} \ : \ A, B \in \mathcal{F}\}$$

et même pour tout choix de $O \in \mathcal{F}$

$$F = \{\overrightarrow{OM} \ : \ M \in \mathcal{F}\}.$$

En particulier, le sous-espace vectoriel F est unique, on l'appelle la direction de $\mathcal{F}$. On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles (symbole $/\!\!/$) s'ils ont même direction (en particulier, cette définition impose qu'ils ont même dimension : une droite ne peut pas être parallèle à un plan). Dans le cas d'un espace vectoriel vu comme espace affine, on retrouve la définition précédente. On dira aussi qu'un sous-espace affine $\mathcal{E}_1$ (de direction E_1) est *faiblement parallèle* à un sous-espace affine $\mathcal{E}_2$ (de direction E_2) si $E_1 \subset E_2$.

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un espace affine. Vérifier que l'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Dans ce cas, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice. Dans un espace affine, montrer que deux hyperplans affines disjoints sont parallèles.

Exercice. Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$ et $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$ deux sous-espaces affines. Montrer qu'ils ont un point en commun si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$. Montrer qu'ils sont égaux si et seulement si $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$.

Exercice. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur le corps $\{0, 1\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Combien contient-il de droites affines ? Faire un dessin. Quelles droites sont parallèles ?

1.3 Barycentres

Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A_1, \dots, A_m$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dans $\mathbf{K}$ tels que $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$. Il existe un unique point B de $\mathcal{E}$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1}$$

Ce point B est appelé *barycentre* du système pondéré $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_m, \lambda_m))$ et noté

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

ou parfois $\mathrm{bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_m, \lambda_m))$.

Exercice. Montrer que si la fonction de $\mathcal{E}$ dans E donnée par $B \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ est bijective si $s \neq 0$ et constante si $s = 0$.

Démonstration. Fixons un point $O \in \mathcal{E}$. Pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_i}) = s\overrightarrow{BO} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

La condition (1.1) est donc satisfaite si et seulement si

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}, \tag{1.2}$$

ce qui est le cas pour un unique $B \in \mathcal{E}$. $\square$

L'équation (1.2) permet de montrer que si $A_1, \dots, A_m$ appartiennent à un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, c'est aussi le cas de leur barycentre.

Par exemple, étant donné deux points A et B de $\mathcal{E}$, on appelle milieu du segment AB le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point M défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Quand tous les poids sont égaux 1, on parle d'isobarycentre. Il faut faire attention quand on travaille avec des corps de caractéristique non nulle : par exemple, en caractéristique 2, un segment n'a pas de milieu...

On peut vérifier les propriétés suivantes des barycentres.

— Pour tout $\alpha \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_2 & \dots & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi se ramener au cas $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

— Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & A_{\sigma(2)} & \dots & A_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \lambda_{\sigma(2)} & \dots & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

— On peut retirer les points de poids nuls

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n-1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

— On peut regrouper les points identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B & B \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \mu + \nu \end{pmatrix}$$

— On a la propriété d'associativité : si $m < n$ et si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & A_{m+1} & \dots & A_n \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $H = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Dans le cas d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel, la notion de barycentre peut s'écrire à l'aide de la structure vectorielle : si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

1.4 Indépendance et engendrement affines

Les notions de familles libres et génératrices sont fondamentales en algèbre linéaire. Nous allons développer l'analogue affine de ces notions.

Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $(\mathcal{F}_i)$ une famille de sous-espaces affines telle que $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcap \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.*

La preuve montrera aussi que l'intersection des directions est la direction de l'intersection.

Démonstration. Soit $O \in \bigcap \mathcal{F}_i$. Soit E la direction de $\mathcal{E}$. Pour tout i, on peut trouver un sous-espace vectoriel $F_i \subset E$ tel que $\mathcal{F}_i = O + F_i$. On a donc

$$\bigcap \mathcal{F}_i = \bigcap (O + F_i) = O + \bigcap F_i$$

qui est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. □

On peut donc définir le sous-espace affine $\mathrm{aff}(\mathcal{A})$ engendré par une partie non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ qui contiennent $\mathcal{A}$ (cette famille est non vide car elle contient $\mathcal{E}$; l'intersection est non vide car $\mathcal{A} \neq \emptyset$).

Proposition. *Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$, l'ensemble* $\mathrm{aff}(\mathcal{A})$ *est l'ensemble de tous les barycentres d'éléments de $\mathcal{A}$.*

Fin cours # 1 du 15 janvier

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres d'éléments de $\mathcal{A}$. On a vu qu'un sous-espace affine est stable par barycentres : ceci implique l'inclusion $\mathcal{B} \subset \mathrm{aff}(\mathcal{A})$.

Pour l'autre inclusion, on vectorialise : soit $O \in \mathcal{A}$. Un sous-espace affine contenant O est de la forme $O + F$ où F est un sous-espace vectoriel de E. Puisque $\mathcal{A} \subset O + F$ si et seulement si $\overrightarrow{OA} \in F$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, on en déduit donc que

$$\begin{aligned} \mathrm{aff}(\mathcal{A}) &= O + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{OA} \ : \ A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \ : \ n \in \mathbf{N}, (\lambda_i) \in \mathbf{K}, A_i \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Un élément M de $\mathrm{aff}(A)$ s'écrit $M = O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum \lambda_i)\overrightarrow{OM} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$. Ainsi, $(1 - \sum \lambda_i)\overrightarrow{MO} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$, donc

$$M = \begin{pmatrix} O & A_1 & \dots & A_n \\ 1 - \sum \lambda_i & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}. \tag{1.3}$$

ce qui montre $\mathrm{aff}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. □

Soient $A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$. On dit que les points $A_1, \dots, A_p$ sont *affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_p}$ sont linéairement indépendants ; quand ce n'est pas le cas, on dit que les points $A_1, \dots, A_p$ sont *affinement liés.*

Proposition. *Soient $O, A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$. Les points $A_1, \dots, A_p$ sont affinement liés si et seulement si il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$ et $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer, en écrivant $\overrightarrow{A_1A_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_1}$, que la relation $\lambda_2\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\lambda_p\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $-(\lambda_2+\cdots+\lambda_p)\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\lambda_p\overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$. □

Cette proposition montre que la définition d'indépendance affine ne dépend pas de l'ordre des points. Deux points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont distincts (on note (AB) la droite engendrée par deux points $A \neq B$) ; trois points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non alignés ; quatre points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non coplanaires, etc.

On dit qu'une famille de points $(A_1, \dots, A_p)$ est une *base affine* de $\mathcal{E}$ si c'est une famille affinement indépendante et affinement génératrice (au sens où $\mathcal{E} = \mathrm{aff}(A_1, \dots, A_p)$). Cela équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \dots, \overrightarrow{A_1A_p}$ forment une base de l'espace vectoriel E. Si $(A_1, \dots, A_p)$ est une base affine de $\mathcal{E}$, alors nécessairement $\dim \mathcal{E} = p - 1$. Tout point $M \in \mathcal{E}$ s'écrit comme barycentre

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

et cette écriture est unique si on impose $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$. On dit que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les coordonnées barycentriques de M dans la base affine $(A_1, \dots, A_p)$.

Il existe une autre manière de paramétrer les points d'un espace affine. On appelle *repère affine* de $\mathcal{E}$ la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de E. On obtient alors une bijection de $\mathbf{K}^n$ dans E donnée par

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto O + \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$$

Exercice. ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Soient ABC 3 points non alignés du plan affine. Les trois droites (AB), (AC) et (BC) délimitent 7 régions du plan. Connaissant les coordonnées barycentriques d'un point dans la base affine (A, B, C), comment déterminer à quelle région il appartient ?

Exercice. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine. Définir les médianes du triangle ABC et montrer qu'elles s'intersectent en un unique point.

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On appelle bimédiane du tétraèdre $ABCD$ les droites passant par les milieux de deux arêtes disjointes du tétraèdre. Montrer que les trois bimédianes s'intersectent en un unique point.

Exercice difficile («théorème de Sylvester–Gallai»). Soit un ensemble fini de points du plan affine $\mathbf{R}^2$ ayant la propriété suivante : toute droite qui contient deux des points en contient au moins trois. Montrer que tous les points sont alignés. Donner un exemple de corps pour lequel l'énoncé analogue est faux.

1.5 Convexité

Dans cette section, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On va utiliser de manière cruciale les notions d'ordre et de positivité. Si A et B sont deux points d'un espace affine réel. Ils définissent un segment

$$[AB] = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ s & t \end{pmatrix} \ : \ s, t \geqslant 0, s + t > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

On dit qu'une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe si on a $[AB] \subset \mathcal{C}$ pour tous A et B dans $\mathcal{C}$.

Il est élémentaire de voir que l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes est convexe. On peut donc définir l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A}$ d'un espace affine réel, notée $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$, comme l'intersection de toutes les parties convexes contenant $\mathcal{A}$. On a la caractérisation équivalente suivante de l'enveloppe convexe comme l'ensemble des barycentres à poids positifs d'éléments de $\mathcal{A}$ (on parle parfois de combinaisons convexes).

Proposition. *Si $\mathcal{A}$ est une partie d'un espace affine réel, alors*

$$\mathrm{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \ : \ m \in \mathbf{N}^*, \ A_i \in \mathcal{A}, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \right\}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ le membre de droite dans l'équation précédente. Une partie convexe est stable par barycentres à poids positif (cela se démontre par récurrence sur le nombre de points en utilisant la propriété d'associativité des barycentres). On en déduit que toute partie convexe contenant $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}$, d'où l'inclusion $\mathrm{conv}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}$.

Par ailleurs, il découle aussi de la propriété d'associativité du barycentre que $\mathcal{B}$ est convexe, et donc que $\mathrm{conv}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. □

A priori, la description précédente nécessite de considérer des combinaisons convexes de longueur arbitrairement grande. Le résultat suivant permet de préciser ce point.

Théorème (Carathéodory)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace affine réel de dimension n. Alors*

$$\mathrm{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n+1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \ : \ A_i \in \mathcal{A}, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{conv}(\mathcal{A})$. Soit $p \in \mathbf{N}$ minimal tel que A s'écrive

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

avec $A_i \in \mathcal{A}$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum \lambda_i = 1$. La minimalité de p implique que $\lambda_i > 0$. En fixant une origine $O \in \mathcal{A}$, on a

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

Supposons $p > n+1$. Alors les points $A_1, \dots, A_p$ sont affinement liés, et donc il existe des scalaires non tous nuls (μ_i) vérifiant $\mu_1 + \dots + \mu_p = 0$ et $\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 + t\mu_1 & \dots & \lambda_p + t\mu_p \end{pmatrix}$$

Les hypothèses impliquent qu'on moins l'un des nombres μ_i est < 0. Lorsque $\mu_i \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \lambda_i + t\mu_i$ est positive sur $\mathbf{R}_+$. Lorsque $\mu_i < 0$, la fonction $t \mapsto \lambda_i + t\mu_i$ s'annule au point $t_i = -\lambda_i/\mu_i \geqslant 0$ et est positive pour $0 \leqslant t \leqslant t_i$. Si on note t le minimum de ces nombres t_i, les scalaires $\lambda_i + t\mu_i$ sont positifs et au moins l'un d'entre eux est nul, ce qui permet d'écrire A comme barycentre de longueur $< p$, contredisant la minimalité de p. □

Exercice. Soit $\mathcal{A}$ une partie compacte de l'espace affine $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$ est compact.

Exercice. (Théorème de Radon) Dans un espace affine réel de dimension n, on considère une partie $\mathcal{A}$ de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{conv}(\mathcal{B}) \cap \mathrm{conv}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Exercice difficile. (Théorème de Helly) Soit $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de parties convexes d'un espace affine réel de dimension d, avec $n \geqslant d+1$. On suppose que toute sous-famille de cardinal $d+1$ a une intersection non vide. Montrer que $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} C_i$ est non vide. **Indication** : *Montrer le résultat par récurrence sur n en appliquant le théorème de Radon.*

Fin cours #2 du 22 janvier

1.6 Applications affines

Une application de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ est dite affine si elle est de la forme $x \mapsto Ax + b$ pour $b \in \mathbf{R}^n$ et $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire. Nous allons étendre ce concept au cadre des espaces affines abstraits.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F. On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est *affine* si il existe une application linéaire $\phi : E \to F$ telle que, pour tous points M, N de $\mathcal{E}$ on ait

$$\phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}.$$

De manière équivalente, pour tous $M \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, on a

$$f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \phi(\overrightarrow{u}).$$

Si f est affine, l'application linéaire ϕ vérifiant cette condition est unique et appelée *partie linéaire* de f. Elle est notée $\overrightarrow{f}$.

Il est parfois utile, quand il n'y a pas d'ambiguïté, de noter M' l'image d'un point M par un application affine.

Exemple. Si $\overrightarrow{u} \in E$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application affine $\tau_{\overrightarrow{u}} : M \mapsto M'$ définie par $M' = M + \overrightarrow{u}$ ou encore $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Les translations sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité.

Exemple. Soit O un point de $\mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle *homothétie de centre O et de rapport λ* l'application affine $h_{M,\lambda} : M \mapsto M'$ définie par la relation $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Quand $\lambda = -1$, on parle plutôt de *symétrie centrale*.

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine et $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ de direction E_1, l'image $f(\mathcal{E}_1)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{f}(E_1)$.

On peut caractériser les applications affines comme celles préservant les barycentres.

Théorème. *Soient $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application entre espaces affines. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est affine.*
2. *Pour $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$*

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } f(M) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On note M' l'image par f d'un point M. Supposons f affine. Si on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$$

alors par linéarité de la partie linéaire de f, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M'A'_i} = \overrightarrow{0}$$

d'où $1 \Longrightarrow 2$.

Pour la réciproque, soit $M \mapsto M'$ une application qui préserve les barycentres. Il faut montrer que l'application $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie (c'est-à-dire que si $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$ alors $\overrightarrow{M'_1N'_1} = \overrightarrow{M'_2N'_2}$) et linéaire. Fixons un repère affine $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$. Posons $A_i = O + \overrightarrow{e_i}$. Un point quelconque $M \in \mathcal{E}$ s'écrit $M = O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$. On a donc

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

en on déduit (cette équation pouvant se réécrire comme un barycentre, cf (1.3)) que

$$\overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A'_i}.$$

Soit $N = O + \mu_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \mu_n \overrightarrow{e_n}$ un autre point. On a donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{e_i}$$

et

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{A_iA'_i}.$$

Il s'ensuit que l'application $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie et linéaire (c'est l'unique application linéaire envoyant $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{A_iA'_i}$), d'où le résultat. $\square$

Exercice. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine entre espaces affines et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{E}$. Montrer que $f(\mathrm{aff}(\mathcal{A})) = \mathrm{aff}(f(\mathcal{A}))$.

Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines, de directions respectives E et F.*

1. *Soient $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ un repère affine de $\mathcal{E}$, P un point de $\mathcal{F}$ et et $\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}$ des vecteurs de F. Il existe une unique application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui envoie O sur P et dont la partie linéaire envoie $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{f_i}$.*
2. *Soient $A_1, \ldots, A_p$ une base affine de $\mathcal{E}$ et $B_1 \ldots, B_p$ des points de $\mathcal{F}$. Il existe une unique application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui envoie A_i sur B_i.*

Le premier point se déduit de l'énoncé analogue en algèbre linéaire : si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E et $f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments quelconques d'un espace vectoriel F, il existe une unique application linéaire qui envoie e_i sur f_i. Le second point se déduit du premier.

Exercice. Montrer qu'une application affine possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de sa partie linéaire.

Une application affine préserve l'alignement (puisqu'elle préserve les barycentres). La réciproquement est partiellement vraie et connue sous le nom de théorème fondamental de la géométrie affine : une bijection d'un espace affine réel de dimension $\geqslant 2$ qui préserve l'alignement est affine. Pour se convaincre de la nécessité des hypothèses, on remarquera que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ préserve l'alignement, et que toute fonction entre espace affines sur le corps $\{0,1\}$ préserve l'alignement puisqu'une droite ne contient que deux points.

Problème. (Théorème «fondamental» de la géométrie affine) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une bijection qui préserve l'alignement (c'est-à dire que si A, B, C sont trois points alignés, leurs images $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sont alignées). On veut montrer que f est affine.

1. Montrer que l'image d'une droite est une droite ; que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; que l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.
2. Soit M un point $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur et $\overrightarrow{v}$ défini par la relation $f(M+\overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{v}$. Montrer que l'on peut définir une fonction $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par la formule $f(M + t\overrightarrow{u}) = f(M) + \lambda(t)\overrightarrow{v}$. Montrer que pour tous réels s, t on a $\lambda(s+t) = \lambda(s) + \lambda(t)$ et $\lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t)$ (autrement dit, $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un automorphisme de corps). En déduire que $\lambda = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, puis que f est affine.
3. Donner un exemple de bijection du plan affine complexe $\mathbf{C}^2$ qui préserve l'alignement mais qui n'est pas affine.

1.7 Le groupe affine

Rappelons que si E est un espace vectoriel, on désigne par $\mathsf{GL}(E)$ le groupe des applications linéaires bijectives de E dans E. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E, on note $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Proposition. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ des espaces affines. Si $f_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $f_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sont des applications affines, alors $f_2 \circ f_1$ est affine et on a $\overrightarrow{f_2 \circ f_1} = \overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$.*

L'ensemble $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ est un groupe pour la loi de composition. L'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme de groupes de $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ dans $\mathsf{GL}(E)$.

Démonstration. Pour A, B dans $\mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{f_2(f_1(A))f_2(f_1(B))} = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1(A)f_1(B)}) = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{AB}))$$

donc $f_2 \circ f_1$ est affine, et sa partie linéaire est $\overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$.

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Alors f est l'application $M \mapsto f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ et donc f est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective ; dans ce cas l'application réciproque, donnée par $N \mapsto O + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{f(O)N})$ est affine. □

On dit qu'une transformation affine $f \in \mathsf{GA}(\mathcal{E})$ est une *dilatation* (on dit parfois : une *homothétie-translation*) si sa partie linéaire est $\lambda\mathrm{Id}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$ (on dit que λ est le *rapport* de f). L'image d'un sous-espace affine par une dilatation est un sous-espace affine parallèle.

Proposition. *1. L'ensemble des dilations forme un sous-groupe de $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$.*

2. Une dilatation $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de rapport 1 est une translation.

3. Une dilatation $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de rapport $\lambda \neq 1$ a un unique point fixe $M \in \mathcal{E}$. On a $f = h_{M,\lambda}$.

Démonstration. Le seul point qui n'est pas évident est le dernier. Soit $M \mapsto M'$ une dilatation de rapport $\lambda \neq 1$. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Pour $M \in \mathcal{E}$, on a $M' = O' + \lambda\overrightarrow{OM}$. On a donc

$$M = M' \iff M = O' + \lambda\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{O'M} = \lambda\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{OO'} = (1-\lambda)\overrightarrow{OM}$$

ce qui est le cas si et seulement si $M = O + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{OO'}$. Dans ce cas f, on a bien $f = h_{M,\lambda}$. $\square$

Exercice. Déterminer la table du multiplication du groupe des dilatations en calculant $\tau_x \circ \tau_y$, $\tau_x \circ h_{M,\lambda}$, $h_{M,\lambda} \circ \tau_x$, $h_{M,\lambda} \circ h_{N,\mu}$.

Exercice. Déterminer le centre du groupe $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$.

Exercice. Montrer que l'application de $E \times \mathsf{GL}(E)$ dans $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ donnée par $(x, \phi) \mapsto \tau_x \circ \phi$ est une bijection. Est-ce que les groupes $E \times \mathsf{GL}(E)$ et $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ sont isomorphes ?

Fin cours # 3 du 29 janvier

1.8 Les théorèmes classiques de géométrie affine

Si A, B, C sont trois points alignés de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq C$, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. On définit alors

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \lambda.$$

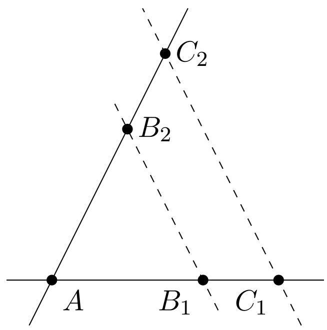
Plus généralement, si A, B, C, D sont des points tels que $A \neq C$ et $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{AC}$, on pose $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \lambda$.

Théorème (Thalès). *Dans un espace affine, soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes s'intersectant en A. Soit A, B_1, C_1 des points distincts de $\mathcal{D}_1$ et A, B_2, C_2 des points distincts de $\mathcal{D}_2$. Alors*

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} \iff (B_1B_2) \mathbin{/\!/} (C_1C_2)$$

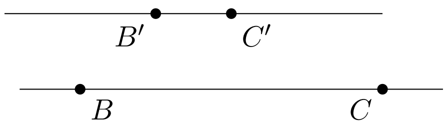
Quand ces conditions sont vérifiées, on a aussi

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{C_1C_2}}$$



Démonstration. Puisque A, B_1, C_1 (et également A, B_2, C_2) sont alignés et distincts, il existe λ_1, λ_2 dans $\mathbf{K}$ tels que $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1\overrightarrow{AC_1}$ et $\overrightarrow{AB_2} = \lambda_2\overrightarrow{AC_2}$. Alors $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB_2} = \lambda_1\overrightarrow{C_1A} + \lambda_2\overrightarrow{AC_2} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{C_1A} + \lambda_2\overrightarrow{C_1C_2}$. Puisque $\overrightarrow{C_1A}$ et $\overrightarrow{C_1C_2}$ sont linéairement indépendants (s'ils étaient liés on aurait $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$), on a $(C_1C_2) \mathbin{/\!/} (B_1B_2)$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$. Si c'est le cas, on a aussi $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB_2} = \lambda_1\overrightarrow{C_1A} + \lambda_1\overrightarrow{AC_2} = \lambda_1\overrightarrow{C_1C_2}$. $\square$

Proposition. *Dans un espace affine, soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles distinctes, $B \neq C$ deux points de $\mathcal{D}$ et $B' \neq C'$ deux points de $\mathcal{D}'$. Il existe une (unique) dilatation f telle que $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. C'est une translation si $(BB') \cap (CC') = \emptyset$ et sinon une homothétie de centre A, où $(BB') \cap (CC') = \{A\}$.*



Démonstration. $\mathcal{P} = \mathrm{aff}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = \mathrm{aff}(B, C, B')$ est un plan ; dans ce plan les deux droites distinctes (BB') et (CC') sont soit disjointes et donc parallèles, soit d'intersection réduite à un point.

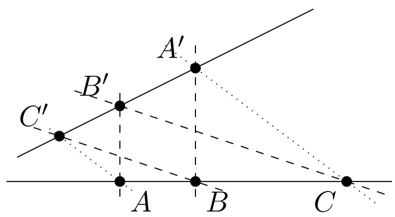
Supposons d'abord $(BB') /\!\!/ (CC')$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\overrightarrow{CC'} = \lambda \overrightarrow{BB'}$. De même, comme $\mathcal{D} /\!\!/ \mathcal{D}'$, il existe $\mu \in \mathbf{K}$ tel que $\overrightarrow{B'C'} = \mu \overrightarrow{BC}$. On a $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \mu \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{BB'}$. Puisque $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont linéairement indépendants (s'ils étaient liés on aurait $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$), on en déduit que $\lambda = \mu = 1$. Si on pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, alors la translation $\tau_{\overrightarrow{v}}$ convient.

Sinon, on a $(BB') \cap (CC') = \{A\}$ avec $A \neq B$ et $A \neq B'$. Puisque $\mathcal{D} /\!\!/ \mathcal{D}'$, le théorème de Thalès implique que $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$. Si on note λ ce scalaire, l'homothéroie $h_{A,\lambda}$ envoie B sur B' et C sur C'.

Pour l'unicité, voir l'exercice suivant. □

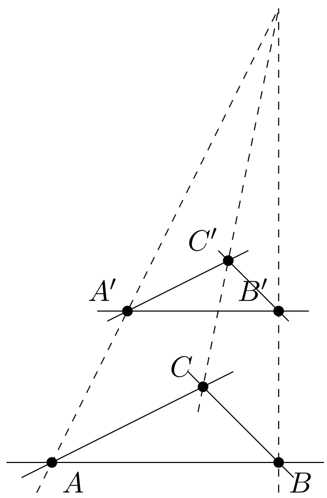
Exercice. Soient A, B deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$ et soient f, g deux dilatations de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(A) = g(A)$ et $f(B) = g(B)$. Montrer que $f = g$.

Théorème (Pappus, version affine)**.** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{D}$ et A', B', C', trois points distincts de $\mathcal{D}'$. On suppose qu'aucun de ces points n'est commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si $(AB') /\!\!/ (A'B)$ et $(BC') /\!\!/ (B'C)$ alors $(AC') /\!\!/ (A'C)$.*



Démonstration. On utilise la proposition précédente. Soit f la dilatation qui vérifie $f(A) = B$ et $f(B') = A'$, et soit g la dilatation qui vérifie $g(B) = C$ et $g(C') = B'$. Ce sont soit deux translations, soit deux homothéties de même centre. Dans les deux cas, elles commutent. Si on pose $h = g \circ f = f \circ g$, alors $h(A) = C$ et $h(C') = A'$. Comme h est une dilatation, on a donc $(AC') /\!\!/ (A'C)$. □

Théorème (Desargues, version affine)**.** *Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un espace affine tels que A, B, C et A', B', C' soient affinement indépendants. On suppose que $(AB) /\!\!/ (A'B')$, $(BC) /\!\!/ (B'C')$ et $(AC) /\!\!/ (A'C')$. Alors les trois droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles.*

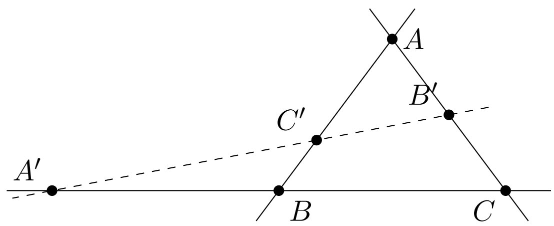


Démonstration. Soit f la dilatation qui vérifie $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Alors $(AC) \parallel (A'f(C))$ et $(BC) \parallel (B'f(C))$ puisque l'image d'une droite par une dilation est une droite parallèle. On a donc $(A'C') = (A'f(C))$ et $(B'C') = (B'f(C))$. Puisque A', B', C' sont affinement indépendants, on a $(A'B') \cap (B'C') = \{C'\}$ et donc $f(C) = C'$. Si f est une translation, les trois droites sont parallèles ; si f est une homothétie de centre M, les trois droites s'intersectent en M. $\square$

Théorème (Ménélaüs)**.** *Soient A, B, C trois points affinement indépendants d'un espace affine. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Les points A', B', C' sont alignés si et seulement si* $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$.

Vérifiez que vous savez construire la figure suivante qui illustre de théorème de Ménélaüs avec les valeurs

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = 2, \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -1, \quad \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -2$$



Pour démontrer le théorème de Ménélaüs, il est utile de déterminer quelles homothéties préservent une droite. Soit $h_{M,\lambda}$ l'homothétie de centre M et de rapport λ (on a donc $h_{M,1} = \mathrm{id}$) et $\mathcal{D}$ une droite affine. Alors (exercice)

$$h_{M,\lambda}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \iff M \in \mathcal{D} \text{ ou } \lambda = 1 \tag{1.4}$$

Démonstration. Soit h_1 l'homothétie de centre A' vérifiant $h_1(B) = C$, soit h_2 l'homothétie de centre B' vérifiant $h_2(C) = A$ et soit h_3 l'homothétie de centre C' vérifiant $h_3(A) = B$. Si on note λ_i le rapport de h_i, alors

$$\lambda_1 = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}, \ \lambda_2 = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}, \ \lambda_3 = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

et ces rapports sont distincts de 1 puisque les points A, B, C sont distincts. La dilatation $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ a B comme point fixe et est donc une homothétie de rapport $\lambda = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

L'application $h_2 \circ h_1$ préserve la droite $(A'B')$ puisqu'elle passe par le centre des deux homothéties. Ainsi h préserve $(A'B')$ si et seulement si h_3 préserve $(A'B')$, ce qui revient à dire (par (1.4), puisque $\lambda_3 \neq 1$) que $C' \in (A'B')$ ou encore que les points A', B', C' sont alignés.

Comme $B \notin (A'B')$, par (1.4), l'homothétie h de centre B préserve $(A'B')$ si et seulement si son rapport est 1, d'où le résultat. $\square$

On énonce sans preuve un dernier théorème.

Théorème (Céva)**.** *Soient A, B, C trois points affinement indépendants. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si* $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1$.

Fin cours #4 du 5 février