# Chapitre 1

# Géométrie affine

On travaille sur un corps $\mathbf{K}$. Dans la plupart des cas, ce sera $\mathbf{R}$ mais on pourra parfois considérer d'autres corps comme $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ ou les corps finis. Tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbf{K}$ et de dimension finie.

## 1.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Avant de définir les espaces affines abstraits, revenons sur le cas plus concret des sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Soit $E$ un espace vectoriel. Pour tout $x$ dans $E$, la translation de vecteur $x$ est l'application $\tau_x : E \to E$ définie par $y \mapsto x + y$. L'application $\tau_x$ est bijective et $\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$. Elle est linéaire uniquement dans le cas $x = 0$. On a de plus $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$ : l'ensemble des translations forme un groupe isomorphe à $(E, +)$.

On dit qu'une partie $\mathcal{F} \subset E$ est un *sous-espace affine* (s.e.a.) s'il existe $x \in E$ et un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tels que

$$\mathcal{F} = \tau_x(F) = x + F = \{x + y \ : \ y \in F\}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement $x \in \mathcal{F}$ puisque $0 \in F$. Si $x_1$ et $x_2$ sont dans $\mathcal{F}$, alors $x_1 - x_2 \in F$ : on retrouve $F$ comme l'ensemble des différences entre éléments de $\mathcal{F}$. En particulier, le sous-espace vectoriel $F$ est unique. On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de direction $F$ passant par $x$. Bien sûr, $x$ n'est pas uniquement déterminé par cette condition : pour tout $x'$ dans $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = x' + F$.

Un sous-espace vectoriel $E \subset V$ est stable par combinaisons linéaires : pour des familles finies $(x_i)_{i \in I}$ dans $E$ et $(\lambda_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{K}$ on a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in E$$

(cela se démontre par récurrence sur $|I|$ ; pour $|I| = 2$ c'est la définition de sous-espace vectoriel). Les combinaisons linéaires permettent d'expliciter la notion d'espace vectoriel engendré : si $(E_i)$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de $V$, leur intersection $\bigcap E_i$ est aussi un sous-espace vectoriel. On peut donc définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie $A \subset V$, noté $\mathrm{Vect}(A)$, comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces vectoriels contenant $A$. On peut aussi l'écrire comme

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \ : \ I \text{ fini }, \lambda_i \in \mathbf{K}, x_i \in A \right\}$$

puisque le membre de droite forme un sous-espace vectoriel qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant $A$.

De la même manière, on peut définir le sous-espace affine engendré par une partie $A \subset V$. On pourrait rester dans le cadre "concret" des sous-espaces affines d'un espace vectoriel, mais pour des applications ultérieures il est utile de disposer d'une notion abstraite d'espace affine.

## 1.2 Espaces affines abstraits

Dans l'exemple d'un sous-espace affine $\mathcal{F} = x + F \subset E$ du paragraphe précédent, les points (les éléments du sous-espace affine $\mathcal{F}$) et les vecteurs (les éléments du sous-espace vectoriel $F$) sont tous deux inclus dans $E$. Dans la définition d'un espace affine abstrait, ce n'est pas le cas ; il n'est pas possible de définir $2M$ où $M + N$ pour des points $M, N$ de $\mathcal{F}$.

[faire un dessin]

Rappelons le vocabulaire des actions de groupes. Une action d'un groupe $G$ (d'élément neutre $e$) sur un ensemble $X$ est la donnée d'une fonction $\mu : G \times X$ dans $X$ qui vérifie les axiomes $\mu(e, x) = x$ et $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ pour tous $g, h$ dans $G$ et $x \in X$. Il est habituel d'écrire $g \cdot x$ plutôt que $\mu(g, x)$, voire $x + g$ lorsque le groupe $G$ est abélien.

On dit qu'une action est *simplement transitive* si pour tous $x$, $y$ dans $X$, il existe un unique $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Autrement dit, pour tout $x$ dans $X$, l'application $g \mapsto g \cdot x$ est une bijection de $G$ sur $X$.

**Définition.** On appelle *espace affine* la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une action simplement transitive de $(E, +)$ sur $\mathcal{E}$, où $E$ est un espace vectoriel. On dit que $E$ est la direction de $\mathcal{E}$. On appelle dimension de $\mathcal{E}$ la dimension de $E$. On appelle droite affine un espace affine de dimension 1, plan affine un espace affine de dimension 2.

Dans ce contexte, le éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les points et sont habituellement notés par des lettres majuscules $A, B, C, M, \ldots$. Les éléments de $E$ sont appelées les vecteurs et habituellement notés par des symboles comme $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$. L'action est notée additivement : $A + \overrightarrow{u}$ est un point.

*Exemple.* L'action de $(V, +)$ sur $V$ par translation $\mu(x, y) = x + y$ est simplement transitive (comme pour tout groupe) : tout espace vectoriel peut donc être vu comme un espace affine.

Étant donnés deux points $A$ et $B$ de $\mathcal{E}$, on note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de $E$ tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$. L'axiome d'action de groupe donne immédiatement la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On a également $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Un espace affine est un espace vectoriel qui a oublié son origine. On a vu que tout espace vectoriel peut naturellement être vu comme un espace affine. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur $E$, tout choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ induit une bijection $\mathcal{E} \to E$

$$M \to \overrightarrow{OM}$$

On peut via cette bijection munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace vectoriel (le «vectorialisé en $O$»), dans lequel le zéro est $O$, mais ce choix n'est pas canonique. Dans les preuves, on commence souvent par choisir une origine $O$ pour remplacer tous les points $M$ par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$.

On appelle *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ l'orbite d'un sous-espace vectoriel de $E$, c'est à dire un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{F} = \{M + \overrightarrow{u} \ : \ \overrightarrow{u} \in F\}$$

où $M \in \mathcal{E}$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On a alors

$$F = \{\overrightarrow{AB} \ : \ A, B \in \mathcal{F}\}$$

et même pour tout choix de $O \in \mathcal{F}$

$$F = \{\overrightarrow{OM} \ : \ M \in \mathcal{F}\}.$$

En particulier, le sous-espace vectoriel $F$ est unique, on l'appelle la direction de $\mathcal{F}$. On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles (symbole $/\!\!/$) s'ils ont même direction (en particulier, cette définition impose qu'ils ont même dimension : une droite ne peut pas être parallèle à un plan). Dans le cas d'un espace vectoriel vu comme espace affine, on retrouve la définition précédente. On dira aussi qu'un sous-espace affine $\mathcal{E}_1$ (de direction $E_1$) est *faiblement parallèle* à un sous-espace affine $\mathcal{E}_2$ (de direction $E_2$) si $E_1 \subset E_2$.

*Exercice.* Soient $A$, $B$, $C$, $D$ quatre points d'un espace affine. Vérifier que l'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Dans ce cas, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

*Exercice.* Dans un espace affine, montrer que deux hyperplans affines disjoints sont parallèles.

*Exercice.* Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$ et $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$ deux sous-espaces affines. Montrer qu'ils ont un point en commun si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$. Montrer qu'ils sont égaux si et seulement si $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$.

*Exercice.* Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur le corps $\{0, 1\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$ ? Combien contient-il de droites affines ? Faire un dessin. Quelles droites sont parallèles ?

## 1.3 Barycentres

**Proposition.** *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A_1, \ldots, A_m$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dans $\mathbf{K}$ tels que $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$. Il existe un unique point $B$ de $\mathcal{E}$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1}$$

Ce point $B$ est appelé *barycentre* du système pondéré $((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_m, \lambda_m))$ et noté

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

ou parfois $\mathrm{bar}((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_m, \lambda_m))$.

*Exercice.* Montrer que si la fonction de $\mathcal{E}$ dans $E$ donnée par $B \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ est bijective si $s \neq 0$ et constante si $s = 0$.

Par exemple, étant donnés deux points $A$ et $B$ de $\mathcal{E}$, on appelle milieu de $A, B$ le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point $M$ défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$, où encore $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

*Démonstration.* Fixons un point $O \in \mathcal{E}$. Pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_i}) = s\overrightarrow{BO} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

La condition (1.1) est donc satisfaite si et seulement si

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i},$$

ce qui est le cas pour un unique $B \in \mathcal{E}$. □

Remarquons que si $A_1, \ldots, A_m$ appartiennent à un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, c'est aussi le cas de leur barycentre.

Par exemple, étant donné deux points $A$ et $B$ de $\mathcal{E}$, on appelle milieu du segment $AB$ le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point $M$ défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Quand tous les poids sont égaux 1, on parle d'isobarycentre. Il faut faire attention quand on travaille avec des corps de caractéristique non nulle : par exemple, en caractéristique 2, un segment n'a pas de milieu...

On peut vérifier les propriétés suivantes des barycentres.

— Pour tout $\alpha \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_2 & \ldots & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi se ramener au cas $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

— Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & A_{\sigma(2)} & \ldots & A_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \lambda_{\sigma(2)} & \ldots & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

— On peut retirer les points de poids nuls

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{n-1} \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

— On peut regrouper les points identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B & B \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \mu + \nu \end{pmatrix}$$

— On a la propriété d'associativité : si $m < n$ et si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & A_{m+1} & \ldots & A_n \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m & \lambda_{m+1} & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $H = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Dans le cas d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel, la notion de barycentre peut s'écrire à l'aide de la structure vectorielle : si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

## 1.4 Indépendance et engendrement affines

Les notions de familles libres et génératrices sont fondamentales en algèbre linéaire. Nous allons développer l'analogue affine de ces notions.

**Proposition.** *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $(\mathcal{F}_i)$ une famille de sous-espaces affines telle que $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcap \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.*

La preuve montrera aussi que l'intersection des directions est la direction de l'intersection.

*Démonstration.* Soit $O \in \bigcap \mathcal{F}_i$. Soit $E$ la direction de $\mathcal{E}$. Pour tout $i$, on peut trouver un sous-espace vectoriel $E_i \subset E$ tel que $\mathcal{E}_i = O + E_i$. On a donc

$$\bigcap \mathcal{E}_i = \bigcap (O + E_i) = O + \bigcap E_i$$

qui est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. □

On peut donc définir le sous-espace affine $\operatorname{aff}(\mathcal{A})$ engendré par une partie non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ qui contiennent $\mathcal{A}$ (cette famille est non vide car elle contient $\mathcal{E}$ ; l'intersection est non vide car $\mathcal{A} \neq \emptyset$).

**Proposition.** *Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$, l'ensemble* $\operatorname{aff}(\mathcal{A})$ *est l'ensemble de tous les barycentres d'éléments de $\mathcal{A}$.*

*Démonstration.* Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres d'éléments de $\mathcal{A}$. On vectorialise : soit $O \in \mathcal{A}$. Un sous-espace affine contenant $O$ est de la forme $O + F$ où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Puisque $\mathcal{A} \subset O + F$ si et seulement si $\overrightarrow{OA} \in f$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, on en déduit donc que

$$\begin{aligned} \operatorname{aff}(\mathcal{A}) &= O + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{OA} \ : \ A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \ : \ n \in \mathbf{N}, (\lambda_i) \in \mathbf{K}, A_i \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Un élément $M$ de $\operatorname{aff}(A)$ s'écrit $M = O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum \lambda_i)\overrightarrow{OM} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$. Ainsi, $(1 - \sum \lambda_i)\overrightarrow{MO} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$, donc

$$M = \begin{pmatrix} O & A_1 & \dots & A_n \\ 1 - \sum \lambda_i & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}. \tag{1.2}$$

On a montré que $\operatorname{aff}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ et l'inclusion réciproque découle du fait qu'un sous-espace affine est stable par barycentre. □

Fin cours # 1 du 16 janvier

Soient $A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$. On dit que les points $A_1, \dots, A_p$ sont *affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_p}$ sont linéairement indépendants ; quand ce n'est pas le cas, on dit que les points $A_1, \dots, A_p$ sont *affinement liés.*

**Proposition.** *Soient $O, A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$. Les points $A_1, \dots, A_p$ sont affinement liés si et seulement si il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$ et $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer, en écrivant $\overrightarrow{A_1A_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_1}$, que la relation $\lambda_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $-(\lambda_2 + \dots + \lambda_p)\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$. □

Cette proposition montre que la définition d'indépendance affine ne dépend pas de l'ordre des points. Deux points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont distincts (on note $(AB)$ la droite engendrée par deux points $A \neq B$) ; trois points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non alignés ; quatre points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non coplanaires, etc.

On dit qu'une famille de points $(A_1, \ldots, A_p)$ est une *base affine* de $\mathcal{E}$ si c'est une famille affinement indépendante et affinement génératrice (au sens où $\mathcal{E} = \mathrm{aff}(A_1, \ldots, A_p)$). Cela équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \ldots, \overrightarrow{A_1A_p}$ forment une base de l'espace vectoriel $E$. Si $(A_1, \ldots, A_p)$ est une base affine de $\mathcal{E}$, alors nécessairement $\dim \mathcal{E} = p-1$. Tout point $M \in \mathcal{E}$ s'écrit comme barycentre

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_p \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

et cette écriture est unique si on impose $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$. On dit que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont les coordonnées barycentriques de $M$ dans la base affine $(A_1, \ldots, A_p)$.

Il existe une autre manière de paramétrer les points d'un espace affine. On appelle *repère affine* de $\mathcal{E}$ la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $E$. On obtient alors une bijection de $\mathbf{K}^n$ dans $E$ donnée par

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto O + \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$$

*Exercice.* ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Soient $ABC$ 3 points non alignés du plan affine. Les trois droites $(AB)$, $(AC)$ et $(BC)$ délimitent 7 régions du plan. Connaissant les coordonnées barycentriques d'un point dans la base affine $(A, B, C)$, comment déterminer à quelle région il appartient ?

*Exercice.* Soient $A, B, C$ trois points non alignés du plan affine. Définir les médianes du triangle $ABC$ et montrer qu'elles s'intersectent en un unique point.

*Exercice.* Soient $A, B, C, D$ quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On appelle bimédiane du tétraèdre ABCD les droites passant par les milieux de deux arêtes disjointes du tétraèdre. Montrer que les trois bimédianes s'intersectent en un unique point.

*Exercice difficile.* Soit un ensemble fini de points du plan affine $\mathbf{R}^2$ ayant la propriété suivante : toute droite qui contient deux des points en contient au moins trois. Montrer que tous les points sont alignés. Donner un exemple de corps pour lequel l'énoncé analogue est faux.

## 1.5 Convexité

Dans cette section, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On va utiliser de manière cruciale les notions d'ordre et de positivité. Si $A$ et $B$ sont deux points d'un espace affine réel. Ils définissent un segment

$$[AB] = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ s & t \end{pmatrix} \ : \ s, t \geqslant 0, s + t > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in [0,1] \right\}.$$

On dit qu'une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe si on a $[AB] \subset \mathcal{C}$ pour tous $A$ et $B$ dans $\mathcal{C}$.

Il est élémentaire de voir que l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes est convexe. On peut donc définir l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A}$ d'un espace affine réel, notée $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$, comme l'intersection de toutes les parties convexes contenant $\mathcal{A}$. On a la caractérisation équivalente suivante de l'enveloppe convexe comme l'ensemble des barycentres à poids positifs d'éléments de $\mathcal{A}$ (on parle parfois de combinaisons convexes).

**Proposition.** *Si $\mathcal{A}$ est une partie d'un espace affine réel, alors*

$$\operatorname{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \ : \ m \in \mathbf{N}^*, \ A_i \in \mathcal{A}, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \right\}.$$

*Démonstration.* Soit $\mathcal{B}$ le membre de droite dans l'équation précédente. Une partie convexe est stable par barycentres à poids positif (cela se démontre par récurrence sur le nombre de points en utilisant la propriété d'associativité des barycentres). On en déduit que toute partie convexe contenant $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}$, d'où l'inclusion $\operatorname{conv}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}$.

Par ailleurs, il découle aussi de la propriété d'associativité du barycentre que $\mathcal{B}$ est convexe, et donc que $\operatorname{conv}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. □

A priori, la description précédente nécessite de considérer des combinaisons convexes de longueur arbitrairement grande. Le résultat suivant permet de préciser ce point.

**Théorème** (Carathéodory)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace affine de dimension $n$. Alors*

$$\operatorname{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n+1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \ : \ A_i \in \mathcal{A}, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}.$$

*Démonstration.* Soit $A \in \operatorname{conv}(\mathcal{A})$. Soit $p \in \mathbf{N}$ minimal tel que $A$ s'écrive

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

avec $A_i \in \mathcal{A}$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum \lambda_i = 1$. En fixant une origine $O \in \mathcal{A}$, on a donc

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

Supposons $p > n+1$. Alors les points $A_1, \dots, A_p$ sont affinement liés, et donc il existe des scalaires non tous nuls $(\mu_i)$ vérifiant $\mu_1 + \dots + \mu_p = 0$ et $\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 + t\mu_1 & \dots & \lambda_p + t\mu_p \end{pmatrix}$$

Soit $t > 0$ minimal tel que l'un des nombres $\lambda_i + t\mu_i$ soit nul (un tel $t$ existe bien : les hypothèses sur $(\mu_i)$ impliquent qu'au moins l'un d'entre eux est strictement négatif). Pour ce choix de $t$, les scalaires $\lambda_i + t\mu_i$ sont $\geqslant 0$ et l'un d'entre eux est nul, ce qui permet d'écrire $A$ comme barycentre de longueur $< p$, contredisant la minimalité de $p$. □

*Exercice.* Soit $\mathcal{A}$ une partie compacte de l'espace affine $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\operatorname{conv}(\mathcal{A})$ est compact.

*Exercice.* (Théorème de Radon) Dans un espace affine réel de dimension $n$, on considère une partie $\mathcal{A}$ de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ telle que $\operatorname{conv}(\mathcal{B}) \cap \operatorname{conv}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

*Exercice difficile.* (Théorème de Helly) Soit $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de parties convexes d'un espace affine réel de dimension $d$, avec $n \geqslant d+1$. On suppose que toute sous-famille de cardinal $d+1$ a une intersection non vide. Montrer que $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} C_i$ est non vide. **Indication** : *Montrer le résultat par récurrence sur $n$ en appliquant le théorème de Radon.*

## 1.6 Applications affines

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives $E$ et $F$. On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est *affine* si il existe une application linéaire $\phi : E \to F$ telle que, pour tous points $M$, $N$ de $\mathcal{E}$ on ait

$$\phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{\phi(M)\phi(N)}.$$

De manière équivalente, pour tous $M \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, on a

$$f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \phi(\overrightarrow{u}).$$

Si $f$ est affine, l'application linéaire $\phi$ vérifiant cette condition est unique et appelée application linéaire *associée* à $f$. Elle est parfois notée $\overrightarrow{f}$.

Il est parfois utile, quand il n'y a pas d'ambiguïté, de noter $M'$ l'image d'un point $M$ par un application affine.

*Exemple.* Si $\overrightarrow{u} \in E$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application affine $M \mapsto M'$ définie $M' = M + \overrightarrow{u}$ ou encore $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Les translations sont les applications affines sont la partie linéaire est l'identité.

*Exemple.* Soit $O$ un point de $\mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle *homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$* l'application affine $M \mapsto M'$ définie par la relation $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Quand $\lambda = -1$, on parle plutôt de *symétrie centrale.*

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine et $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ de direction $E_1$, l'image $f(\mathcal{E}_1)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{f}(E_1)$. On peut caractériser les applications affines comme celles préservant les barycentres.

**Théorème.** *Soient $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application entre espaces affines. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application $f$ est affine.*
2. *Pour $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$*

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } f(M) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Fin cours # 2 du 23 janvier

*Démonstration.* On note $M'$ l'image par $f$ d'un point $M$. Supposons $f$ affine. Si on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$$

alors par linéarité de l'application linéaire associée à $f$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M'A'_i} = \overrightarrow{0}$$

d'où $1 \implies 2$.

Pour la réciproque, soit $M \mapsto M'$ une application qui préserve les barycentres. Il faut montrer que l'application $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie et linéaire. Fixons un repère affine $(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$. Posons $A_i = O + \overrightarrow{e_i}$. Un point quelconque $M \in \mathcal{E}$ s'écrit $M = O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$. On a donc

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

en on déduit (cette équation pouvant se réécrire comme un barycentre, cf (1.2)) que

$$\overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A'_i}.$$

Soit $N = O + \mu_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{e_n}$ un autre point. On a donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{e_i}$$

et

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{A_i A'_i}.$$

Il s'ensuit que l'application $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie et linéaire (c'est l'unique application linéaire envoyant $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{A_i A'_i}$), d'où le résultat. $\square$

La proposition suivante est très facile.

**Proposition.** *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines. On note $E_2$ la direction de $\mathcal{E}_2$.*

1. *Soient $(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ un repère affine de $\mathcal{E}_1$, $P$ un point de $\mathcal{E}_2$ et et $\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}$ des vecteurs de $E_2$. Il existe une unique application affine de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ qui envoie $O$ sur $P$ et telle que l'application linéaire associée envoie $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{f_i}$.*
2. *Soient $A_1, \dots, A_p$ une base affine de $\mathcal{E}_1$ et $B_1 \dots, B_p$ des points de $\mathcal{E}_2$. Il existe une unique application affine de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ qui envoie $A_i$ sur $B_i$.*

*Exercice.* Montrer qu'une application affine possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire associée.

Une application affine préserve l'alignement ; la réciproquement est partiellement vraie et connue sous le nom de théorème fondamental de la géométrie affine : une bijection d'un espace affine réel de dimension $\geqslant 2$ qui préserve l'alignement est affine. Pour se convaincre de la nécessité des hypothèses, on remarquera que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ préserve l'alignement, et que toute fonction entre espace affines sur le corps $\{0, 1\}$ préserve l'alignement.

*Problème.* (Théorème «fondamental» de la géométrie affine) Soit $\mathcal{E}$ le plan affine sur réel et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une bijection qui préserve l'alignement (c'est-à dire que si $A$, $B$, $C$ sont trois points alignés, leurs images $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sont alignées). On veut montrer que $f$ est affine.

1. Montrer que l'image d'une droite est une droite ; que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; que l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

2. Soit $M$ un point et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur. On définit $\overrightarrow{v}$ par la relation $f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{v}$. Montrer que l'on peut définir une fonction $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par la formule $f(M + t\overrightarrow{u}) = f(M) + \lambda(t)\overrightarrow{v}$. Montrer que pour tous réels $s, t$ on a $\lambda(s + t) = \lambda(s) + \lambda(t)$ et $\lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t)$ (autrement dit, $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un automorphisme de corps). En déduire que $\lambda = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, puis que $f$ est affine.
3. Donner un exemple de bijection du plan affine complexe $\mathbf{C}^2$ qui préserve l'alignement mais qui n'est pas affine.

## 1.7 Le groupe affine

Rappelons que si $E$ est un espace vectoriel, on désigne par $\mathsf{GL}(E)$ le groupe des applications linéaires bijectives de $E$ dans $E$. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction $E$, on note $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

**Proposition.** *La composition de deux applications affines est une application affine, et on a* $\overrightarrow{f_2 \circ f_1} = \overrightarrow{f_1} \circ \overrightarrow{f_2}$. *L'ensemble* $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ *est un groupe pour la loi de composition. L'application* $f \mapsto \overrightarrow{f}$ *est un morphisme de groupes de* $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ *dans* $\mathsf{GL}(E)$.

*Démonstration.* Soient $f_1$ et $f_2$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ deux applications affines de parties linéaires respectives $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$. Alors pour $A$, $B$ dans $\mathcal{E}$

$$\overrightarrow{f_2(f_1(A))f_2(f_1(B))} = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1(A)f_1(B)}) = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{AB}))$$

donc $f_2 \circ f_1$ est affine, et l'application linéaire associée est $\overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$.

Soit $f$ une application affine. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Alors $f$ est l'application $M \mapsto f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ et donc $f$ est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective ; dans ce cas l'application réciproque, donnée par $N \mapsto O + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{f(O)N})$ est affine. □

On dit qu'une transformation affine $f \in \mathsf{GA}(\mathcal{E})$ est une *dilatation* (on dit parfois : une *homothétie-translation*) si son application linéaire associée est $\lambda \mathrm{Id}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$ (on dit que $\lambda$ est le rapport de $f$). L'image d'un sous-espace affine par une dilatation est un sous-espace affine parallèle.

**Proposition.** *1. L'ensemble des dilations forme un sous-groupe de* $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$.

*2. Les dilatations de rapport* $1$ *sont les translations.*

*3. Les dilatations de rapport* $\lambda \neq 1$ *sont les homothéties de rapport* $\lambda$ *; leur seul point fixe est leur centre.*

*Démonstration.* Le seul point qui n'est pas évident est le dernier. Soit $f$ une dilatation de rapport $\lambda \neq 1$. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Un point $M$ est fixé par $f$ si et seulement si

$$M = f(M) = f(O) + \lambda\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{f(O)M} = \lambda\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{Of(O)} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OM}$$

ce qui est le cas si et seulement si $M = O + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Of(O)}$. Dans ce cas $f$ est l'homothétie de centre $M$ et de rapport $\lambda$, notée $h_{M,\lambda}$. □

*Exercice.* Déterminer la table du multiplication du groupe des dilatations en calculant $\tau_x \circ \tau_y$, $\tau_x \circ h_{M,\lambda}$, $h_{M,\lambda} \circ \tau_x$, $h_{M,\lambda} \circ h_{N,\mu}$.

*Exercice.* Déterminer le centre du groupe $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$.

*Exercice.* Montrer que l'application de $E \times \mathsf{GL}(E)$ dans $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ donnée par $(x, \phi) \mapsto \tau_x \circ \phi$ est une bijection. Est-ce que les groupes $E \times \mathsf{GL}(E)$ et $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ sont isomorphes ?

## 1.8 Les théorèmes classiques de géométrie affine

Si $A$, $B$, $C$ sont trois points alignés de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq C$, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$. On définit alors

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \lambda.$$

Plus généralement, si $A, B, C, D$ sont des points tels que $A \neq C$ et $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{AC}$, on pose $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \lambda$.

**Théorème** (Thalès)**.** *Dans un espace affine, soit $ABB'$ des points affinement indépendants, et $C, C'$ distincts des précédents tels que $A, B, C$ et $A', B', C'$ sont alignés. Alors*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \iff (BB') \mathbin{/\!/} (CC')$$

*et si c'est le cas on a $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BB}}{\overline{CC'}}$*

*Démonstration.* Il existe $\lambda, \mu$ dans $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB'} = \mu \overrightarrow{AC'}$. Alors $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{AC'} = (\lambda - \mu)\overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{CC'}$. Puisque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont linéairement indépendants, on a $(CC') \mathbin{/\!/} (BB')$ si et seulement si $\lambda = \mu$. Si c'est le cas, on a aussi $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{CA} + \lambda AC' = \lambda \overrightarrow{CC'}$. □

**Proposition.** *Dans un espace affine, soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles distinctes, $B \neq C$ deux points distincts de $\mathcal{D}$ et $C' \neq C'$ deux points distincts de $\mathcal{D}'$. Il existe une (unique) dilatation $f$ telle que $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. C'est une translation si $(BB') \cap (CC') = \emptyset$ et sinon une homothétie de centre $O$, où $(BB') \cap (CC') = \{O\}$.*

*Démonstration.* $\mathcal{P} = \mathrm{aff}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = \mathrm{aff}(B, C, B')$ est un plan ; dans ce plan les deux droites distinctes $(BB')$ et $(CC')$ sont soit disjointes, soit d'intersection réduite à un point.

Si $(BB') \cap (CC') = \emptyset$, alors $(BB') \mathbin{/\!/} (CC')$. Il existe donc des scalaires $\lambda$ et $\mu \in \mathbf{K}^*$ tels que $\overrightarrow{CC'} = \lambda \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \mu \overrightarrow{BC}$. On a $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \mu \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{BB'}$. Puisque $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont libres, on en déduit que $\lambda = \mu = 1$. Si on pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, alors la translation $\tau_{\overrightarrow{v}}$ convient.

Si $(BB') \cap (CC') = \{O\}$, alors $O \neq B$ et $O \neq B'$, donc il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$. Puisque $\mathcal{D} \mathbin{/\!/} \mathcal{D}'$, le théorème de Thalès implique que $\overrightarrow{OC'} = \lambda \overrightarrow{OC}$, donc l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$ convient.

L'unicité est laissée en exercice. □

Fin cours # 3 du 6 février