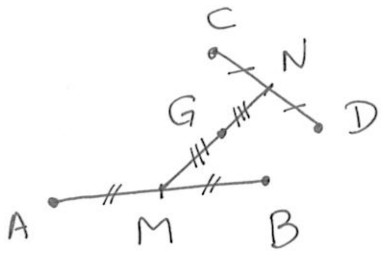
Géométrie - Partiel du 20 mars 2025

Exercice 1 : $\mathcal{E}$ espace affiné de direction E. $A, B \in \mathcal{E}$, F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

- Si $(A+F)\cap(B+G) \neq \emptyset$, soit $M \in (A+F)\cap(B+G)$: il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $M = A + \vec{u} = B + \vec{v}$. Par suite, $\vec{AB} = \vec{u} - \vec{v} \in F + G$.
- Inversement, si $\vec{AB} \in F + G$, il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{w} \in G$ tels que $\vec{AB} = \vec{u} + \vec{w}$. Alors $B = A + \vec{u} + \vec{w}$, ou encore $B - \vec{w} = A + \vec{u}$. Ainsi $M := B - \vec{w} = A + \vec{u} \in (A+F)\cap(B+G)$.

Exercice 2 : $A, B, C, D \in \mathcal{P}$, plan affine.



D'après l'associativité du barycentre, l'isobarycentre G de A, B, C, D vaut $G = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & N \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, où $M := \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N := \begin{pmatrix} C & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci signifie que G est le milieu de M et N, qui sont respectivement les milieux de A et B, et de C et D.

(De même, G est le milieu de P et Q, les milieux de A et C, et de B et D. Ceci montre que $(MPNQ)$ est un parallélogramme.)

Exercice 3 : $\mathcal{E}$ un espace affiné de E.

$Dil(\mathcal{E}) = \{ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, application affiné de partie linéaire $\vec{f} = \lambda\, id_E, \lambda \neq 0 \}$

On a vu que $f \in Dil(\mathcal{E})$ est une translation si elle n'a pas de point fixe, une homothétie de centre M si elle a M pour unique point fixe, et $f = id_{\mathcal{E}}$ sinon.

1) Soit $f \in Dil(\mathcal{E})$, $\mathcal{D}$ une droite affiné de $\mathcal{E}$ de direction D.

Si $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ alors en particulier $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Si $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, montrons que $\mathcal{D} \subset f(\mathcal{D})$, d'où alors $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Par définition d'une application affiné f de partie linéaire $\vec{f} = \lambda\, id_E$, $\lambda \neq 0$, on a $f(M) = f(A) + \lambda \overrightarrow{AM}$ quels que soient $A, M \in \mathcal{E}$.

Par suite, $f(M) = N$ équivaut à $M = A + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{f(A)N}$.

En particulier, si $A \in \mathcal{D}$ et $N \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{f(A)N} \in D$, car $f(A) \in \mathcal{D}$ puisque $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Donc $N = f(M)$ avec $M = A + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{f(A)N} \in \mathcal{D}$.

Autrement dit, $N \in f(\mathcal{D})$, quel que soit $N \in \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D} \subset f(\mathcal{D})$.

(On aurait aussi pu dire que $\vec{f}$ est bijective et utiliser le fait général que l'image d'un sous-espace affine par une application affine f est un sous-espace affine, qui est de même dimension lorsque $\vec{f}$ est bijective. Donc $f(\mathcal{D})$ est une droite affiné comme $\mathcal{D}$. Par suite, elle coïncide avec $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}$ contient $f(\mathcal{D})$.)

2) Soit $f \in Dil(\mathcal{E})$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ droites affinés distinctes, de directions D_1 et D_2. On suppose $f \neq id_{\mathcal{E}}$, $f(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$, $f(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_2$.

a) si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \ni M$, alors $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{M\}$ puisque $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$.

Et $f(M) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont stables par f.

Donc $f(M) = M$. Ainsi f a pour point fixe M. Comme $f \in Dil(\mathcal{E})$ et $f \neq id_{\mathcal{E}}$, ceci implique que f est une homothétie de centre M.

b) si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$, $\mathcal{D}_1 = A_1 + D_1$, $\mathcal{D}_2 = A_2 + D_2$,

alors $\underline{\overrightarrow{A_1A_2} \notin D_1 + D_2}$, d'après l'exercice 1.

Puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont stables par f, il existe $\underline{\vec{u}_1 \in D_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in D_2}$ tels que $f(A_1) = A_1 + \vec{u}_1$ et $f(A_2) = A_2 + \vec{u}_2$.

On en déduit $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{f(A_1)f(A_2)} - \vec{u}_2 + \vec{u}_1$,

c'est-à-dire $\overrightarrow{A_1A_2} = \lambda\,\overrightarrow{A_1A_2} - \vec{u}_2 + \vec{u}_1$, puisque $\vec{f} = \lambda\, id_E$.

Comme $\overrightarrow{A_1A_2} \notin D_1 + D_2$, ceci implique $\underline{\lambda = 1}$ et $\underline{\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \in D_1 \cap D_2}$.

Puisque $\underline{f \in Dil(\mathcal{E})}$, $\underline{f \neq id_{\mathcal{E}}}$ et $\underline{\vec{f} = id_E}$, f est une translation, et ce qui précède montre de plus qu'elle est la translation de vecteur $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 =:$ $\vec{u} \in D_1 \cap D_2$.

3) Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de direction D.

$S = \{ f \in Dil(\mathcal{E})\ ;\ \mathcal{D} \text{ est stable par } f \}$.

- Si $f \in S$ et si f est une homothétie, distincte de $id_{\mathcal{E}}$ (i.e. $\lambda \neq 1$), son centre doit appartenir à $\mathcal{D}$: en effet, si O est son centre, quel que soit $M \in \mathcal{E}$, O, M et $f(M)$ sont alignés ; en particulier si $M \in \mathcal{D}$, $f(M) \in \mathcal{D}$ donc $O \in (M f(M)) = \mathcal{D}$ si $M \neq f(M)$.
- Si $f \in S$ et si f est une translation de vecteur $\vec{u}$, quelque soit $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = M + \vec{u}$; en particulier si $M \in \mathcal{D}$, $f(M) \in \mathcal{D}$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{Mf(M)} \in D$, la direction de $\mathcal{D}$.
- Notons que $id_{\mathcal{E}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{0}$.
- Inversement, $\mathcal{D}$ est stable par toute translation de vecteur $\vec{u} \in D$, puisque $\tau_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u} \in \mathcal{D}$ si $M \in \mathcal{D}$, et par toute homothétie de centre O appartenant à $\mathcal{D}$, puisque $h_{O,\lambda}(M) = O + \lambda\,\overrightarrow{OM}$ appartient à $\mathcal{D}$ si O et $M \in \mathcal{D}$, et donc $\lambda\,\overrightarrow{OM} \in D$.

Donc $S = \{ \tau_{\vec{u}}\ ;\ \vec{u} \in D \} \cup \{ h_{O,\lambda}\ ;\ \substack{O \in \mathcal{D} \\ \lambda \in \mathbb{R}^*} \}$, où

$\tau_{\vec{u}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{u}$ et $h_{O,\lambda}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

* Montrons que S est un sous-groupe de $Dil(\mathcal{E})$: $id_{\mathcal{E}} \in S$.

Soient $f, g \in S$. On sait que $f \circ g$ et $g^{-1} \in Dil(\mathcal{E})$, puisque c'est un groupe (ceci est dit dans l'énoncé).

De plus, $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ implique $f \circ g(\mathcal{D}) = f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $g^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Donc $f \circ g$ et $g^{-1} \in S$.

* Le sous-groupe S n'est pas plus commutatif que $Dil(\mathcal{E})$,

car si $\vec{u} \in D \setminus \{0\}$ et $O \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\tau_{\vec{u}}(h_{O,\lambda}(M)) = h_{O,\lambda}(M) + \vec{u} = O + \lambda \overrightarrow{OM} + \vec{u}$$

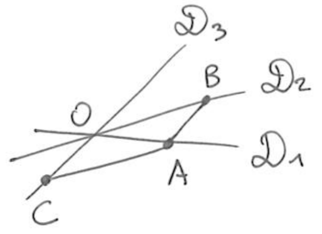
$$h_{O,\lambda}(\tau_{\vec{u}}(M)) = h_{O,\lambda}(M + \vec{u}) = O + \lambda \overrightarrow{ON}, \quad N = M + \vec{u},$$

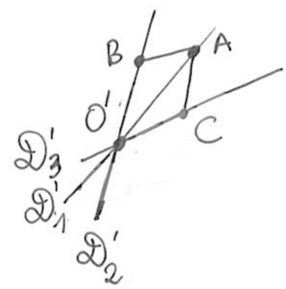
$$= O + \lambda \overrightarrow{OM} + \lambda \vec{u}.$$

Donc $\tau_{\vec{u}} \circ h_{O,\lambda}(M) \neq h_{O,\lambda}(\tau_{\vec{u}}(M))$ puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\lambda \neq 1$.

Donc $\tau_{\vec{u}} \circ h_{O,\lambda} \neq h_{O,\lambda} \circ \tau_{\vec{u}}$, avec $\tau_{\vec{u}}$ et $h_{O,\lambda} \in S$.

Exercice 4 : $\mathcal{E}$ plan affine de direction E.





1) $A \in \mathcal{D}_1 \setminus \{O\}$, π_2 projection sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à $\mathcal{D}_3$, $\pi_3 = id_{\mathcal{E}} - \pi_2$:
$\vec{OC} = \pi_3(\vec{OA})$, $\vec{OB} = \pi_2(\vec{OA})$ sont indépendants car ils appartiennent respectivement à D_3 et D_2, et $D_2 \cap D_3 = \{0\}$ puisque $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes et disjointes.
Donc $(O, \vec{OB}, \vec{OC})$ est un repère du plan $\mathcal{E}$. Pour les mêmes raisons, $(O', \vec{O'B'}, \vec{O'C'})$ aussi.
De plus $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$ par définition de π_2 et π_3.
Donc A a pour coordonnées $(1,1)$ dans le repère $(O, \vec{OB}, \vec{OC})$.
De même, A' a pour coordonnées $(1,1)$ dans le repère $(O', \vec{O'B'}, \vec{O'C'})$.

2) Comme (O,B,C) et (O',B',C') sont des bases affines du plan $\mathcal{E}$, il existe une unique application affine f telle que $f(O)=O'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$.
De plus, $f(A) = f(O) + \vec{f}(\vec{OA})$, où $\vec{f}$ est la partie linéaire de f. Comme $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$, on a $\vec{f}(\vec{OA}) = \vec{f}(\vec{OB}) + \vec{f}(\vec{OC})$ par additivité de $\vec{f}$, i.e. $\vec{f}(\vec{OA}) = \vec{O'B'} + \vec{O'C'} = \vec{O'A'}$. Donc $f(A) = O' + \vec{O'A'} = A'$.
Enfin, f est bijective, sa réciproque étant l'unique application affine g ; $g(O')=O$, $g(B')=B$, $g(C')=C$.

3) Une bijection affine envoie une droite sur une droite. Or $\mathcal{D}_1 = (OA)$, $\mathcal{D}'_1 = (O'A')$, donc $f(\mathcal{D}_1) = (f(O)f(A)) = (O'A') = \mathcal{D}'_1$. De même, $f(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_2$, $f(\mathcal{D}_3) = \mathcal{D}_3$.

4) f, g deux bijections affines telles que $f(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}'_i$, $g(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}'_i$, $i=1,2,3$.
Alors $f(O) \in \mathcal{D}'_1 \cap \mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{D}'_3 = \{O'\}$ donc $f(O)=O'$. De même, $g(O)=O'$.
Donc $h(O) = f^{-1}(g(O)) = f^{-1}(O') = O$, où l'on note $h = f^{-1}\circ g$: O est point fixe de h.
De plus, on a $h(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_i$, donc $\vec{h}(D_i) = D_i$, $i=1,2,3$, où $\vec{h}$ est la partie linéaire de h. Comme $\vec{OA} \in D_1$, $\vec{OB} \in D_2$, $\vec{OC} \in D_3$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{h}(\vec{OA}) = \alpha \vec{OA}$, $\vec{h}(\vec{OB}) = \beta \vec{OB}$, $\vec{h}(\vec{OC}) = \gamma \vec{OC}$, les vecteurs $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ étant non nuls.
Or $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$, donc $\vec{h}(\vec{OA}) = \vec{h}(\vec{OB}) + \vec{h}(\vec{OC}) = \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$. Comme $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ sont indépendants, ceci implique $\alpha = \beta = \gamma =: \lambda$. Ainsi $\vec{h}(\vec{OB}) = \lambda \vec{OB}$, $\vec{h}(\vec{OC}) = \lambda \vec{OC}$, donc $\vec{h} = \lambda\, id_E$ et $h = h_{O,\lambda}$.