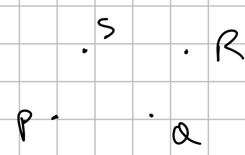
Ex. 1

1) <u>But</u> : $P+\vec{v} = Q \iff \vec{OP}+\vec{v} = \vec{OQ}$

$P + \vec{v} = Q \iff \vec{PQ} = \vec{v} \iff \vec{PO}+\vec{OQ} = \vec{v} \iff \vec{OQ} = \vec{OP}+\vec{v}$

2)



Par hyp. $\vec{PQ} = \lambda \vec{SR}$ et $\vec{PS} = \mu \vec{QR}$

On a : $\vec{PS}+\vec{SR}+\vec{RQ} = \lambda\vec{SR}$

$$\mu\vec{QR}+\vec{SR}+\vec{RQ} = \lambda \vec{SR}$$

$$(\mu-1)\vec{QR} = (\lambda-1)\vec{SR}$$

Or $\vec{QR}$ et $\vec{SR}$ sont non-colinéaires car Q, S, R non-alignés.

D'où $\mu-1=\lambda-1 = 1$

Ex. 2

1). Le sens "$\Rightarrow$" est trivial car $A, B \in Y$ entraîne $(AB) \subseteq Y$

car (AB) = plus petit sea contenant A et B

- $\Leftarrow$: Soit $O \in Y$. Soit $\vec{Y} = \{\vec{OM} \,/\, M\in Y\}$

. $\vec{Y} \neq \emptyset$ car $\vec{OO} = \vec{0} \in \vec{Y}$

. Si $\lambda\in \mathbb{K}$ et $\vec{v} = \vec{OM}\in\vec{Y}$. Soit $N = O+\lambda\vec{OM}$

Alors $N\in(OM)\subseteq Y$ donc $N\in Y$ donc $\vec{ON} = \lambda\vec{v}\in\vec{Y}$

. Soient $\vec{v} = \vec{OM}$ et $w = \vec{ON}$ dans Y

Soit $P \in M + \frac{1}{2} \vec{MN} \in (MN)\subseteq Y$ donc $\vec{OP}\in\vec{Y}$

donc $2\vec{OP}\in\vec{Y}$ (par le point précédent)

et on a : $\vec{OM}+\vec{ON} = \vec{OP}+\vec{PM}+\vec{OP}+\vec{PN}$

$$= 2\vec{OP}+\vec{PM}+\vec{PM}+\vec{MN}$$

$$= 2\vec{OP}+2\vec{PM}+\vec{MN}$$

Or $\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{MN}$ ie $2\vec{MP} = \vec{MN}$ donc $\vec{OM}+\vec{ON} = 2\vec{OP} \in \vec{Y}$

2) "$\Leftarrow$" est fausse si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathcal{E} = E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ Soit $Y = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$

Ici si $A\neq B$ dans Y alors $(AB) = \{A+\lambda\vec{AB} \,/\, \lambda = 0,1\}$
$= \{A, B\}$.

Donc la condition « $\forall A \neq B$ dans Y, $(AB) \subseteq Y$ » est satisfaite

Mais $\vec{Y} = \{ \overrightarrow{OM} \mid M \in Y \}$ n'est pas un sev (en prenant par exemple $O = (0,0)$).

Ici $\vec{Y} = \{ \vec{0}, \overrightarrow{(0,0)(1,0)} = (1,0), (0,1) \}$

et $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin \vec{Y}$.

3) • On suppose que $ABCD$ est parall. (avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$)

Soit $P = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On a : $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$ D'où $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DP} = \vec{0}$ ie $P = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

• On suppose $P = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

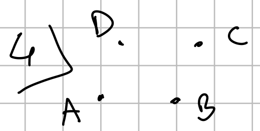
ie $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

D'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) =$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ D'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

4)



On suppose $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

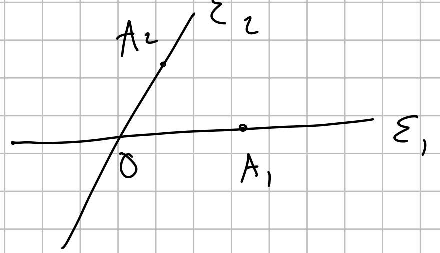
Or (car $K = 2$) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

Ex. 3

$\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$, $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$ sea de $(\mathcal{E}, E)$

(1) • On suppose : $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$



Par hypoth. $\exists (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \in E_1 \times E_2$ tq $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

Soit $O = A_1 + v_1 \in \mathcal{E}_1$

et on a : $O = A_1 + v_1 + v_2 - v_2 = A_1 + \overrightarrow{A_1A_2} - v_2$

$= A_2 - v_2 \in \mathcal{E}_2$

• Réciproque : si $O \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ Alors : $\overrightarrow{A_1A_2} = \underbrace{\overrightarrow{A_1O}}_{\in E_1} + \underbrace{\overrightarrow{OA_2}}_{\in E_2}$

(2) • On suppose $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Alors $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$ car $A_1, A_2 \in \mathcal{E}_1$

• On suppose $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$

Par (1) $\exists O \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ et on a : $\mathcal{E}_i = O + E_i$, $i = 1, 2$.

D'où $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$

Ex. 4 $(\mathcal{H}_1, H_1)$, $(\mathcal{H}_2, H_2)$ deux hyperplans avec $\dim H_i = \dim E - 1$ où $\mathcal{H}_i$ sea de $(\mathcal{E}, E)$.

Supposons H_1 et H_2 non-parall. Alors $H_1 + H_2 = E$.

Par l'exo. 3 (si $A_i \in \mathcal{H}_i$, $\overrightarrow{A_1A_2} \in H_1 + H_2$), ils ne sont pas disjoints.

Ex. 5 • On suppose $s = 0$. Notons $f : \mathcal{E} \to E$ l'application

Soit $B, C \in \mathcal{E}$. $f(B) = \sum \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \sum \lambda_i (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA_i})$

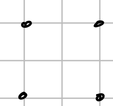
$$= \left(\sum \lambda_i\right) \overrightarrow{BC} + f(C) = f(C)$$

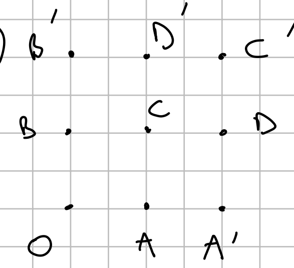
• On suppose $s \neq 0$. Soient $B, C \in \mathcal{E}$ tq $f(B) = f(C)$

le calcul précédent entraine : $(\sum \lambda_i) \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ d'où $B = C$

• Surjectivité : Soit $\vec{v} \in E$. On fixe $C \in \mathcal{E}$ et on cherche B tq $f(B) = \vec{v}$ ie $s \cdot \overrightarrow{BC} + f(C) = \vec{v}$

ie $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{s}(\vec{v} - f(C))$. Un tel B existe

Ex. 6 1)  4 points et 3 droites

2) 

• Pour A, B donnés $(A \neq B)$, (AB) contient 3 points

• On considère les droites qui partent de O

$(OA) = (OA')$, $(OB) = (OB')$, $(OC) = (OC')$, $(OD) = (OD')$.

• 3 droites horizontales

Pour les autres, elles coupent l'axe Ox en O, A ou A' donc au maximum 3 et en fait on les a toutes en partant de O, A et A'.

Ex. 7 1) $l : V \to W \qquad \vec{b} \in W$

Soit $\mathcal{E} = \{x \in V \ / \ l(x) = \vec{b}\}$ supposé non-vide

Soit x_0 tq $l(x_0) = \vec{b}$. Soit $x \in V$.

$x \in S \iff l(x) = l(x_0) \iff l(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker l$

$\iff x \in x_0 + \ker(l)$ D'où $\mathcal{E} = x_0 + \ker(l)$

2) Soit $S = \{\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \varphi$ solution de $(E)\}$

Soit $\varphi_0 \in S$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors

$\varphi \in S \iff \varphi - \varphi_0$ $\underbrace{\text{sol de } (H)}_{\text{est un sev de } \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ de dim } n}$ ← équation homogène.

3) u_0 sol de (H) : $u \in S \iff u - u_0 \in S_H$

4) $P = \{f \in E \ / \ \forall x \ f(x+1) = f(x)\}$ sev de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

↳ fonctions 1-périodique.

$S = f_0 + P$ où f_0 est une sol. de l'équation. (par exemple $f_0(x) = x$)

5) $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Ex. 8

1) (a) $D_1 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad D_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$D_4 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = 2 - x \\ z = x \end{array}$

b) oui

2) Soient $A_1, \dots, A_4$ tq $A_i \in D_i$ et les A_i sont alignés.

$A_1(x_1, 0, 1)$, $A_2(1, y_2, 0)$ $A_3(0, 1, z_3)$

$A_4(t, 2-t, t)$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (1 - x_1, y_2, -1)$

$\overrightarrow{A_1A_3} = (-x_1, 1, z_3)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (t - x_1, 2 - t, t - 1)$

$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 z_3 + 1 = 0 \\ x_1 - z_3(1-x_1) = 0 \\ 1 - x_1 + x_1 y_2 = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ y, z, x tous non-nuls et $x \neq 1$ $\to y \neq 1$

$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{cases} y_2(t-1) + 2 - t = 0 \\ x_1 - t + (x_1 - 1)(t-1) = 0 \\ (1-x_1)(2-t) + y_2(x_1 - t) = 0 \end{cases}$ $t \neq 1$ et $t \neq 2$ $x \neq t$

$$\begin{cases} yt = t - 2 + y \\ \cancel{x} - t + xt - \cancel{x} - t + 1 = 0 \\ 2 - t - 2x + xt + yx - yt = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} yt = y + t - 2 \\ xt = 2t - 1 \\ 2 - t - 2x + 2t - 1 + x - 1 - y - t + 2 = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow 2 - x - y = 0$

On reporte dans (3) : $1 - x + x(2-x) = 0$

$-x^2 + x + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} \quad \text{ou} \quad = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2}$$

On obtient au plus deux sécantes. Reste à vérifier qu'on peut remonter les calculs.

3) $D_5 = (0,0,0) + \mathrm{Vect}(1,1,2) : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

On a bien $(D_1, \dots, D_5)$ en position générale.
Reste à voir que les deux droites obtenues à la question 2 ne coupent pas D_5.

La première droite : δ_1 avec $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{et } y = \dfrac{x-1}{x}\right)$

$$y = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ici $\delta_1 = (A_1 A_2)$ où $A_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 1\right)$

$A_2 = \left(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Soit $M = \alpha A_1 + (1-\alpha) A_2 = \left(\alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 - \alpha, (1-\alpha)\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \alpha\right) \in \delta_1$

Si $M \in D_5$ alors : $\alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 - \alpha + (\alpha - 1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0$

$\times 2$

$$\alpha + \sqrt{5}\alpha + 2 - 2\alpha + (\alpha - 1)(3 - \sqrt{5}) = 0$$

$$\alpha + \cancel{\sqrt{5}\alpha} + 2 - 2\alpha + 3\alpha - \cancel{\sqrt{5}\alpha} - 3 + \sqrt{5} = 0$$

$$2\alpha = 1 - \sqrt{5} \quad \text{ie} \quad \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Absurde

et $2x - z = 0$ donne : $2\alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 - 2\alpha - 2\alpha = 0$

ie $\alpha + \sqrt{5}\alpha + 2 - 4\alpha = 0$

$(\sqrt{5} - 3)\alpha = -2$ ie $\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}-3}$

ie $\alpha = \frac{-2(\sqrt{5}+3)}{5-9} = \frac{-2(\sqrt{5}+3)}{-4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$

Ainsi la droite S_1 ne coupe pas D_5.

- Reste à faire de même avec S_2 où $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Ex. 17

1) $A = (1,1)$ $B = (2,1)$

$y = 1$

2) $A = (1, 2, -3)$ $B = (4, -5, -2)$ $C = (3, -2, -3)$

$\vec{AB} = (3, -7, 1)$ $\vec{AC} = (-1, 3, -1)$

$\vec{u} = (x, y, z) \in (\mathrm{Vect}\{\vec{AB}, \vec{AC}\})^\perp$: $\begin{cases} 3x - 7y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2y \\ z = y \end{cases}$ $\vec{u} = (2, 1, 1)$

$P : 2x + y + z + d = 0$

Avec A : $2 + 2 - 3 + d = 0$: $d = -1$

$P : 2x + y + z - 1 = 0$

Ex 18.

$A = (x_A, y_A)$ $B = (x_B, y_B)$ $P = (x, y)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x_B - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0$$

$\iff \vec{AB}$ et $\vec{AP}$ colinéaires

Ex 19 le det $= 0 \iff \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x \\ y_A & y_B & y_C & y \\ z_A & z_B & z_C & z \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A & x - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - x_A & y - y_A \\ z_A & z_B - z_A & z_C - z_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0 \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ liés

$\iff \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\} \iff M \in A + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$

$\iff M \in (ABC)$.

Ex . 9

1) $A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ $\quad B = (b_1, \dots, b_4)$ $\quad C = (c_1 \quad c_4)$

- On suppose A, B, C alignés :

$C = A + 2\overrightarrow{AB} \iff \forall i = 1,2,3,4, \quad c_i = a_i + 2(b_i - a_i)$

$\iff a_i + b_i + c_i = 0 \qquad = 2b_i - a_i = 2b_i + 2a_i$

Soit $i \in \{1, \dots, 4\}$ Mq soit $a_i = b_i = c_i$ soit $a_i \neq b_i \neq c_i \neq a_i$

Pour ça, montrons que si deux sont égaux alors le troisième leur est égal. Si $a_i = b_i = 0$ alors $c_i = 0$; si $a_i = b_i = 1$ alors $c_i = -2 = 1$

et si $a_i = b_i = 2$ alors $c_i = -4 = 2$

et on a bien un set

- On suppose qu'on a un set.

Pour $i \in \{1, \dots, 4\}$. Si $a_i = b_i = c_i$ alors $a_i + b_i + c_i = 0$.

Si $a_i \neq b_i \neq c_i \neq a_i$ alors : $a_i + b_i + c_i = 0 + 1 + 2 = 0$

et on retrouve $C = A + 2\overrightarrow{AB}$

2) Soient $A \neq B$. Soit $C \in \mathbb{K}^4 - \{A, B\}$

$\{A, B, C\}$ est un set $\iff C \in (AB)$

Or (AB) est de cardinal 3 donc

$C \in (AB) \iff C = (AB) - \{A, B\}$ ce qui montre son existence et son unicité.

3) Par la question 2, un set est déterminé par la donnée de deux cartes différentes dont le nombre est $\dfrac{81 \times 80}{2} = 1080$

4) Si on a au moins 21 cartes, on sait qu'il existe au moins un set possible.

Ex. 16 Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble fini des points considérés

On va montrer la contraposée : Si les points ne sont pas alignés alors il existe une droite qui contient exactement deux points de $\mathcal{P}$.

Notons Δ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ qui contiennent au moins deux points de $\mathcal{P}$.

Soit $\Gamma = \{(d, A) \,/\, d \in \Delta, A \in \mathcal{P}, A \notin d\}$.

Notons $m_0 = \min\{\text{dist}(d, A) \,/\, (d, A) \in \Gamma\}$

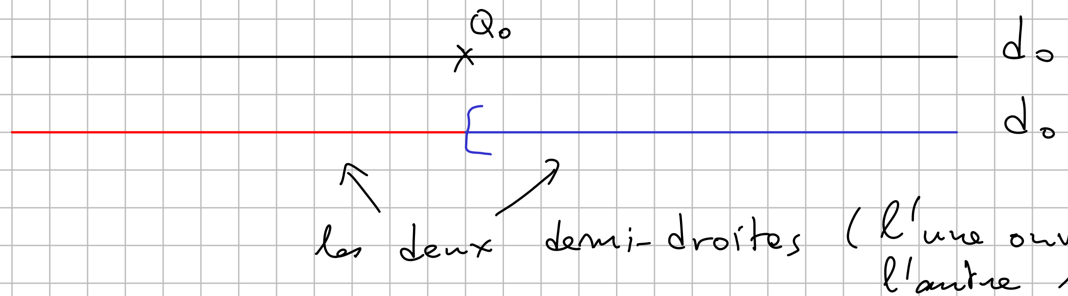
Ici $\text{dist}(d, A)$ signifie la distance entre le point A et la droite d. Notons que m_0 est bien défini car Γ est de cardinal fini.

Soit alors $(d_0, A_0) \in \Gamma$ t.q. $\text{dist}(d_0, A_0) = m_0$.

Soit Q_0 le projeté orthogonal de A_0 sur d_0.

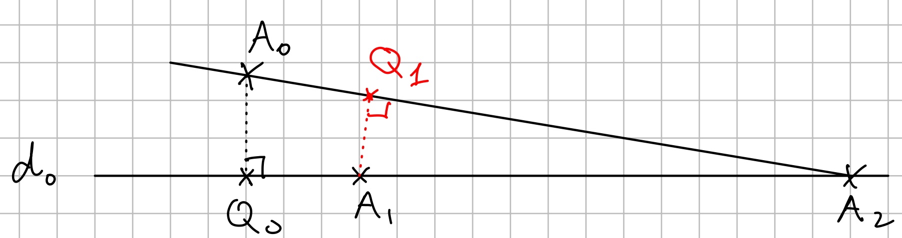
Montrons que d_0 contient exactement deux points de $\mathcal{P}$.

Par l'absurde supposons que d_0 contienne au moins trois points de $\mathcal{P}$. La droite d_0 se partitionne en deux demi-droites comme sur le dessin suivant :



Comme d_0 contient au moins trois points de $\mathcal{P}$, l'une des ~~demi-contient~~ en contient (au moins) deux.

Notons A_1, A_2 ces deux points de sorte que A_1 soit le plus proche de Q_0. Remarquons qu'il est possible d'avoir $A_1 = Q_0$. On se retrouve avec la configuration suivante :



On obtient une situation où le projeté Q_1 de A_1 sur la droite $(A_0 A_2)$ est tel que la distance entre A_1 et la droite $(A_0 A_2)$ est $< m_0$ ce qui est absurde.

- Montrons que l'énoncé peut être faux si le corps de base n'est pas $\mathbb{R}$.

Ici soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathcal{E} = \mathbb{K}^2$

Soit alors $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les points de $\mathcal{E}$ (il y en a neuf).

On a vu que dans cette situation, une droite est composée d'exactement trois points donc la propriété " Toute droite contenant deux points de $\mathcal{P}$ en contient au moins trois ". Pourtant, les points de $\mathcal{P}$ ne sont pas sur une même droite (car une droite contient exactement trois points).