Ex. 1 :

A partie compacte de $\mathbb{R}^n$

$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{n+1} \\ \lambda_1 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \;/\; \begin{array}{l} (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 \\ A_i \in A \end{array} \right\}$

$\hookrightarrow$ Théor. de Carathéodory.

Notons $K = \{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \;/\; \forall i, \lambda_i \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 \}$

On voit que K est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit $M \in \mathbb{R}^n$. On a :

$M \in \mathrm{Conv}(A) \iff \exists (A_1, \ldots, A_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in A^{n+1} \times K$

tq. $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$

que l'on peut écrire : $M = \sum_{i=1} \lambda_i A_i$ (dans $\mathbb{R}^n$)

On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{R}^n)^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(A_1, \ldots, A_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i$$

φ est continue et $\mathrm{conv}(A) = \varphi(A^{n+1} \times K)$

est donc l'image d'un compact par une application continue

C'est donc un compact.

Ex. 2 $(\mathcal{E}, E)$ de dim. n.

$A = \{ A_0, \ldots, A_{n+1} \}$

On a : $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ tq $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i} = \vec{0}$

Soit O un point quelconque de $\mathcal{E}$.

On a : $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (\overrightarrow{A_0 O} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0}$

$$\left(\sum \lambda_i\right) \overrightarrow{A_0 O} + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = 0$$

$$\left(-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\right) \overrightarrow{OA_0} + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$$

Notons $\alpha_0 = -\sum \lambda_i$ et $\alpha_1 = \lambda_1, \dots, \alpha_{n+1} = \lambda_{n+1}$

On a donc $\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 0$ avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$

Soient $I = \{ i \mid \alpha_i > 0 \}$ et $J = \{ i \mid \alpha_i \leq 0 \}$

I et J sont non vides. De plus : $\sum_{i \in I} \alpha_i > 0$

et $\sum_{i \in J} \alpha_i < 0$ car $\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{i \in J} \alpha_i = 0$

On a : $\sum_{i \in I} \underbrace{\alpha_i}_{>0} \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i \in J} \underbrace{(-\alpha_i)}_{\geq 0} \overrightarrow{OA_i}$ $\quad (*)$

Soit $G = \text{bar}\{ (A_i, \alpha_i) \mid i \in I \}$

Alors $\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) \overrightarrow{OG}$

De même soit $H = \text{bar}\{ (A_i, -\alpha_i) \ i \in J \}$

Alors $\sum_{i \in J} (-\alpha_i) \overrightarrow{OA_i} = \left(-\sum_{i \in J} \alpha_i\right) \overrightarrow{OH}$

Par $(*)$ et du fait que $\sum_{i \in I} \alpha_i = -\sum_{i \in J} \alpha_i$ on obtient

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ ie $G = H$

Ainsi G est baryc. de $\mathcal{B} = \{ A_i \mid i \in I \}$

et de $\mathcal{C} = \{ A_i \mid i \in J \}$.

Ex. 3

1) $P = c(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_p)^{m_p}$

$$P' = c\left(m_1 (X - \alpha_1)^{m_1 - 1} (X - \alpha_2)^{m_2} \cdots (X - \alpha_p)^{m_p} \right)$$
$$+ c(X - \alpha_1)^{m_1} \times \left((X - \alpha_2)^{m_2} \cdots (X - \alpha_p)^{m_p} \right)'$$
$$= c \sum_{k=1}^{p} m_k \frac{(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_p)^{m_p}}{(X - \alpha_k)}$$

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p} \frac{m_k}{X - \alpha_k}$$

2) Soit z racine de P'. Montrons que $z \in \text{Conv}(P)$

si z est racine de P alors ok.

Sinon : $\displaystyle 0 = \sum_{k=1}^{p} \frac{m_k}{z - \alpha_k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{m_k \overline{(z-\alpha_k)}}{|z-\alpha_k|^2}$

puis en conjuguant : $\displaystyle \sum_{k=1}^{p} \frac{m_k}{|z-\alpha_k|^2} (z - \alpha_k) = 0$

ou encore : $\displaystyle \sum_{k=1}^{p} \frac{m_k}{|z-\alpha_k|^2} \overrightarrow{\alpha_k z} = \vec{0}$

Ainsi z est barycentre des α_k avec des poids > 0

ie $z \in \mathrm{Conv}(P)$.

Ainsi $(P')^{-1}(0) \subseteq \mathrm{Conv}(P)$

D'où $\mathrm{conv}((P')^{-1}(0)) = \mathrm{conv}(P') \subseteq \mathrm{Conv}(P)$

Ex. 4 $(\mathcal{E}, E)$ affine et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine de partie linéaire $\varphi : E \to E$.

- Montrons d'abord que : $\forall \vec{u} \in E \setminus \{0\}, \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \varphi(u) = \lambda u$

Soit $u \in E \setminus \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{E}$ et B tq $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Par hypothèse la droite $f((AB)) = (f(A) f(B))$ est $//$ à la droite (AB). Ainsi $\overrightarrow{f(A) f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ie $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \lambda \overrightarrow{AB}$ et $\lambda \neq 0$ car $\varphi(\overrightarrow{AB})$ dirige la droite $f((AB))$.

- Montrons ensuite que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \ \forall \vec{u} \in E, \ \varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

Soient $u_1, u_2 \in E$. $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ tq $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$.

$$\underbrace{\varphi(u_1 + u_2)}_{\lambda (u_1 + u_2)} = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

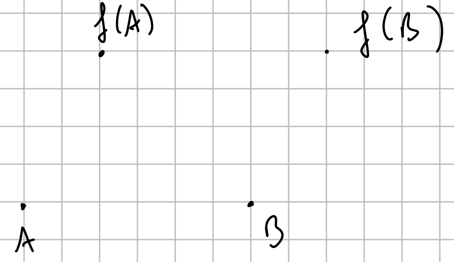
- Si u_1, u_2 non-colin. alors $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.
- Si $u_2 = \alpha u_1$: $\varphi(u_2) = \alpha \varphi(u_1) = \lambda_1 \alpha u_1 = \lambda_1 u_2$

- La suite est peut-être du cours.

On a montré que la partie linéaire φ de f est de la forme $\lambda . \mathrm{Id}_E$

- Cas $\lambda = 1$:

$\overrightarrow{f(A) f(B)} = f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$



est un parall. donc par la fiche 1 on obtient : $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$ donc c'est une translation.

Cas $\lambda \neq 1$. Mq. f admet un point fixe O. Soit $P \in E - \{O\}$

O est fixe $\Leftrightarrow$ $\cancel{\forall P}$, $\overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{Of(P)} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{Pf(P)} = \lambda \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{Pf(P)} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{Pf(P)}}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \overrightarrow{PO} = \dfrac{\overrightarrow{Pf(P)}}{1-\lambda} \Leftrightarrow O = P + \dfrac{\overrightarrow{Pf(P)}}{1-\lambda}$

Un tel O existe.

Pour un tel O : $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{Of(M)} = \lambda \overrightarrow{OM}$

d'où $f(M) = O + \lambda \overrightarrow{OM}$ homothétie de rapport λ et de centre O.

Ex. 8

(a) $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$ (trivial)

(b) $\overrightarrow{h_{M,\lambda} \circ \tau_{\vec{u}}} = \lambda Id \circ Id = \lambda Id$ donc c'est homothétie de rapport λ. Reste à trouver le centre, qu'on note I.

$h_{M,\lambda}(\tau_{\vec u}(I)) = I \Leftrightarrow h_{M,\lambda}(I + \vec{u}) = I$

$\Leftrightarrow M + \lambda \overrightarrow{M(I+\vec{u})} = I$

$\Leftrightarrow M + \lambda(\overrightarrow{MI} + \vec{u}) = I \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \lambda(\overrightarrow{MI} + \vec{u})$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{MI} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \dfrac{\lambda \vec{u}}{1-\lambda} \Leftrightarrow I = M + \dfrac{\lambda \vec{u}}{1-\lambda}$

(c) On cherche le point fixe de $\tau_u \circ h_{M,\lambda}$

$\tau_u(h_{M,\lambda}(I)) = I \Leftrightarrow \tau_u(M + \lambda \overrightarrow{MI}) = I \Leftrightarrow M + \lambda \overrightarrow{MI} + \vec{u} = I$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \lambda \overrightarrow{MI} + \vec{u} \Leftrightarrow I = M + \dfrac{\vec{u}}{1-\lambda}$

(d) • Si $\lambda\mu = 1$ alors $h_{M,\lambda} \circ h_{N,\mu}$ = translation.

• Sinon : cherchons le point fixe

$h_{M,\lambda}(h_{N,\mu}(I)) = I \Leftrightarrow h_{M,\lambda}(N + \mu \overrightarrow{NI}) = I$

$\Leftrightarrow M + \lambda \overrightarrow{M(N + \mu NI)} = I \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \lambda(\overrightarrow{MN} + \mu \overrightarrow{NI})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \lambda \overrightarrow{MN} + \lambda\mu \overrightarrow{NM} + \lambda\mu \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow (1-\mu\lambda)\overrightarrow{MI} = \lambda \overrightarrow{MN} + \lambda\mu \overrightarrow{NM}$

Ex 12

1) $\mathcal{F} = A + F$ $\quad \mathcal{G} = B + G$ et $E = F \oplus G$

On a : $\overrightarrow{AB} \in F + G$ donc par l'ex 3 TD1, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$

D'où $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est sea de direction $F \cap G = \{0\}$, c'est donc un singleton

2) $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ $\quad M \longmapsto \mathcal{F} \cap (M + G)$ (bien définie par 1))

Soient $M, M' \in \mathcal{E}$.

- Supposons $M' = p(M)$ ie $\{M'\} = \mathcal{F} \cap (M + G)$

Alors $M' \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{MM'} \in G$ (car $M' \in M + G$)

- Supposons $M' \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{MM'} \in G$ alors $M' \in \mathcal{F} \cap (M + G)$

trivial

3) - Supposons que p soit une projec$^{\circ}$ affine.

On a clairement : $p \circ p = p$ donc $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ et $\vec{p}$ est une projection vectorielle.

Soit $O = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ alors $O \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{OO} \in G$ donc $p(O) = O$

- Supposons : $\vec{p}$ est une proj. vectorielle et $\exists O \in \mathcal{E}$ point fixe de p.

Soient F et G tq $\vec{p}$ soit la projection sur F // à G.

Soit $\mathcal{F} = O + F$ et $\mathcal{G} = O + G$ et montrons que p est la project. sur $\mathcal{F}$ // à $\mathcal{G}$.

Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' = p(M)$. Alors $\vec{p}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{p(O)\,p(M)} = \overrightarrow{OM'} \in F$

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

et $\overrightarrow{OM} = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$

et $\vec{p}(\overrightarrow{OM}) = f = \overrightarrow{OM'}$ donc $f + \overrightarrow{M'M} = f + g$

et donc $\overrightarrow{M'M} = g \in G$ ie $\overrightarrow{MM'} \in G$

De plus $\overrightarrow{OM'} \in F$ et $O \in \mathcal{F}$ donc $M' \in \mathcal{F}$

Ainsi par 2) $M' = p(M) = \mathcal{F} \cap (M + G)$

4) Le sens $\Rightarrow$ est trivial.

$\Leftarrow$: on a $\overrightarrow{p \circ p} = \vec{p}$ donc $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ donc $\vec{p}$ est une projec. vectorielle. De plus $\forall M, p(p(M)) = p(M)$ donc $p(M)$ est invariant. Par 3) c'est ok.

5) Soit g une projection affine sur $\mathcal{F}$ // à G.

Soit t une translation de vecteur $\vec{u} \in F \setminus \{0\}$.

et soit $f = t \circ g$.

Alors $\vec{f}^2 = \vec{t} \circ \vec{g} \circ \vec{t} \circ \vec{g} = \vec{g}^2$

et $\vec{f} = \vec{g}$ donc $\vec{f}^2 = \vec{f}$ est une projection vectorielle

Par contre : supposons que O soit fixe par f.

Alors $t(g(O)) = O$ ie $g(O) + \vec{u} = O$

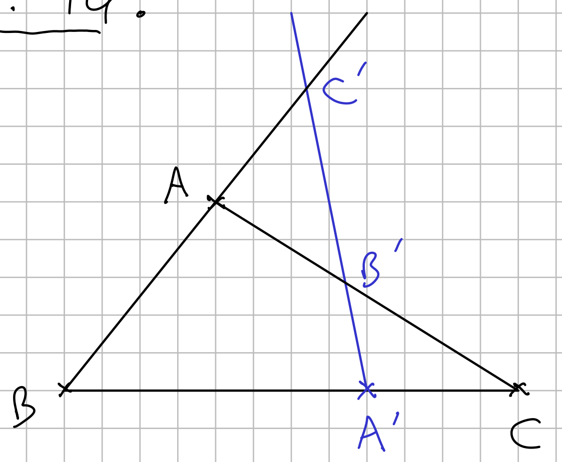
donc $\overrightarrow{O\,g(O)} = \vec{u} \in F$

mais $\overrightarrow{O\,g(O)} \in G$ (par 2))

Donc $\overrightarrow{O\,g(O)} = \vec{0}$ ie $g(O) = O$

D'où $O + \vec{u} = O$ Absurde.

Ex. 14.



. Soit h_1 homoth. de centre A' tq $h_1(B) = C$

. h_2 : centre B' tq $h_2(C) = A$

. h_3 : centre C' tq $h_3(A) = B$

On note λ_i = rapport de h_i

$\lambda_1 = \dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$, $\lambda_3 = \dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$

Les λ_i sont $\neq 1$. Soit $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$.

On a $h(B) = B$ donc h est une homothétie de rapport λ.

On voit que $h_2 \circ h_1$ envoie A' et B' dans $(A'B')$ donc $h_2 \circ h_1$ envoie $(A'B')$ sur elle-même

Ainsi $h((A'B')) = (A'B') \iff h_3((A'B')) = (A'B')$

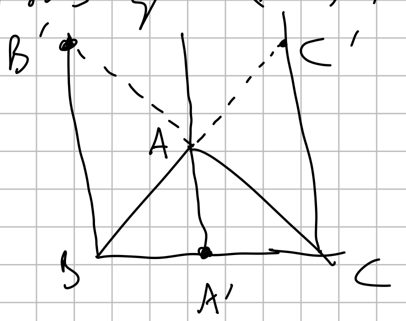
$\iff C' \in (A'B')$

Mais : h préserve $(A'B') \iff \lambda = 1$ (car $B \notin (A'B')$)

Ainsi $\lambda = 1 \iff C' \in (A'B')$

Ex. 15 $\quad A' \in (AB)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ distincts de A, B, C.

- Supposons que $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$



Thalès dans (CBB')

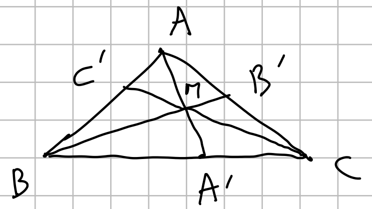
$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}$$

Thalès dans : (BCC') : $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}$

le produit : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{A'B}{A'C} \dfrac{BC}{BA'} \dfrac{CA'}{CB} = -1$

- Supposons que (AA'), (BB'), (CC') se coupent en $M = \mathrm{bar}((A,\alpha),(B,\beta)(C,\gamma))$

On a : (AM) coupe (BC) en A' donc $\dfrac{A'B}{A'C} = -\dfrac{\gamma}{\beta}$



Ici $\mathrm{bar}((B,\beta),(C,\gamma)) = A'$

Donc $\quad \beta \overrightarrow{A'B} + \gamma \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ ie $\overline{A'B} = -\dfrac{\gamma}{\beta} \overline{A'C}$

De même : $B' = \mathrm{bar}((A,\alpha),(C,\gamma))$ donc $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}$

et $C' = \mathrm{bar}((A,\alpha),(B,\beta))$: $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

le produit : $\dfrac{A'B}{A'C} \dfrac{B'C}{B'A} \dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{-\gamma}{\beta} \times \dfrac{-\alpha}{\gamma} \times \dfrac{-\beta}{\alpha} = -1$

- Supposons que ce produit soit égal à -1.

Si les droites sont $\parallel$ alors il n'y a rien à faire.

Sinon : deux droites (au moins) parmi (AA'), (BB'), (CC') se coupent et on peut supposer que ce sont (AA') et (BB').

Notons M leur intersection avec $M = \mathrm{bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$

Comme précédemment : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{\gamma}{\beta}$ et $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}$

On a donc : $-\dfrac{\gamma}{\beta} \times -\dfrac{\alpha}{\gamma} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ ie $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

ie $\quad \alpha \overrightarrow{C'A} + \beta \overrightarrow{C'B} = 0$ ie $C' = \mathrm{bar}((A,\alpha),(B,\beta))$

D'où $M = \mathrm{bar}((C', \beta+\alpha), (C,\gamma))$ d'où $M \in (CC')$.

Ex. 13

1) • linéaire : ok ; involution : trivial.

On a même une équivalence : pour $\sigma \in \mathrm{End}(E)$, (dim E quelconque)

on a : $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id} \iff \sigma$ est la symétrie par rapport à $\ker(\sigma - \mathrm{Id})$

// à $\ker(\sigma + \mathrm{Id})$

2) On choisit $O \in \mathcal{F}$ (pas $\mathcal{E}$)

On définit : $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$; $M \mapsto O + \sigma(\overrightarrow{OM})$

Soient $M \in \mathcal{E}$, $O, O' \in \mathcal{F}$. Soit $M' \in \mathcal{E}$.

But : $\overrightarrow{OM'} = \sigma(\overrightarrow{OM}) \iff \overrightarrow{O'M'} = \sigma(\overrightarrow{O'M})$

$\Rightarrow$: $\sigma(\overrightarrow{O'M}) = \sigma(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) = \sigma(\overrightarrow{O'O}) + \sigma(\overrightarrow{OM})$

$= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{O'M'}$

Remarque : $s(M) \in \mathcal{F}$

$\Leftarrow$: idem par symétrie

3) Soient $M, N \in \mathcal{E}$ et $O \in \mathcal{F}$.

$\sigma(\overrightarrow{MN}) = \sigma(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{s(M)O} + \overrightarrow{O\,s(N)} = \overrightarrow{s(M)\,s(N)}$

4) $\Rightarrow$ ok pour "s est une applic. affine"

De plus soit $O \in \mathcal{F}$ et $M \in \mathcal{E}$ et $M' = s(M)$.

Alors $s(s(M)) = s(M') = O + \sigma(\overrightarrow{OM'})$

$= O + \overrightarrow{OM'} = M'$ $\qquad$ $\overrightarrow{OM'} \in F$ car $O, M' \in \mathcal{F}$

$\Leftarrow$: Soit σ la partie linéaire de s.

Alors $\sigma \circ \sigma = \sigma$ (car $s \circ s = s \Rightarrow \overrightarrow{s \circ s} = \vec{s} \circ \vec{s} = \vec{s}$)

Soit alors F, G sev de E tq σ = symétrie par rapport à F // à G

Mq : $\exists O$ point fixe de s

Soit $P \in \mathcal{E}$ (non-fixe sinon rien à faire)

et soit $O = \mathrm{bar}((P,1),(s(P),1))$

Alors $s(O) = \mathrm{bar}((s(P),1),(s\circ s(P),1)) = O$

Soit alors $\mathcal{F} = O + F$ et $\mathcal{G} = O + G$

et soit $M \in \mathcal{E}$. On a :

$\overrightarrow{s(O)\,s(M)} = \sigma(\overrightarrow{OM})$ Donc s est la symétrie

$\overset{\shortparallel}{O}\; s(M)$

par rapport à $\mathcal{F}$ // à $\mathcal{G}$.