Feuille d'exercices n° 1

Notations. Dans cette fiche de TD, on considère des espaces vectoriels sur un corps de base $\mathbb{K}$. Si rien n'est spécifié, on considèrera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 1 (Sans coordonnées)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

1. Pour trois points $O, P, Q \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in E$, montrer que $P + \vec{v} = Q$ si et seulement si $\overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.
2. On dira que des points sont *colinéaires* s'ils sont sur une même droite affine. Alors, un *parallélogramme* est une suite (P, Q, R, S) de quatre points dont aucune partie de trois points ne sont colinéaires, telle que la droite déterminée par $\overrightarrow{PQ}$ soit parallèle à celle déterminée par $\overrightarrow{RS}$, et que la droite déterminée par $\overrightarrow{PS}$ soit parallèle à celle déterminée par $\overrightarrow{QR}$.

   Montrer que si (P, Q, R, S) est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit Y une partie non vide de $\mathcal{E}$.

1. On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas 2. Montrer que Y est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si : pour tout $(A, B) \in Y^2$, avec $A \neq B$, la droite (AB) est incluse dans Y.
2. Cette équivalence est-elle vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
3. On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique autre que 2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Montrer également la réciproque : si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu alors celui-ci est un parallélogramme.
4. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme sont parallèles.

Exercice 3. Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$ et $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$ deux sous-espaces affines d'un espace affine. Montrer qu'ils ont un point en commun si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$. Montrer qu'ils sont égaux si et seulement si $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$.

Exercice 4. Dans un espace affine, montrer que deux hyperplans affines disjoints sont parallèles.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soient $A_1, \ldots, A_m$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des éléments de $\mathbf{K}$. On pose $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$. Montrer que si la fonction de $\mathcal{E}$ dans E donnée par $B \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ est bijective si $s \neq 0$ et constante si $s = 0$.

Exercice 6 (Corps finis)**.**

1. On considère un plan affine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Combien a-t-il de points et de droites ? Trouver une représentation dans le plan réel.
2. On considère un plan affine sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Combien a-t-il de points et de droites ? Combien chaque droite a-t-elle de points ? Montrer que par chaque point, il passe quatre droites et que pour une direction donnée, il y a trois droites parallèles a cette direction.
3. Trouver le nombre de points et de droites dans un plan affine sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier quelconque.

Exercice 7 (Exemples d'espaces affines)**.** 1. Soient deux espaces vectoriels V et W, $l : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $\vec{b} \in W$. Montrer que l'ensemble des solutions linéaires de l'équation

$$l(\vec{x}) \ = \ \vec{b} \ ,$$

s'il n'est pas vide, est muni d'une structure naturelle d'espace affine. Déterminer sa direction.

2. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. L'ensemble des applications $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui sont solutions de l'équation

$$a_n \frac{d^n}{dx^n}\phi \ + \ a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\phi \ + \ \ldots a_0\phi \ = \ \psi$$

a-t-il une structure naturelle d'espace affine ? Dans l'affirmative, quelle est sa dimension ?

3. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ et $b \in \mathbb{R}$. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels vérifiant

$$u_{n+k} \ + \ a_{k-1}u_{n+k-1} \ + \ \cdots \ + \ a_1u_{n+1} \ + \ a_0u_n \ = \ b$$

est-il muni d'une structure naturelle d'espace affine ?

4. L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ a-t-il une structure naturelle d'espace affine ?

5. L'ensemble des matrices dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$de la forme

$$\begin{pmatrix} 1+a-b & a-b & 0 \\ 0 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ est-il naturellement un espace affine ? Déterminer sa dimension.

Exercice 8 (Positions et intersections)**.** On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soit $k \geq 3$ un entier. On dit qu'une famille $(\Delta_i)_{1\leq i\leq k}$ de droites affines est en *position générale* si

1. pour $i \neq j$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$
2. pour tout triplet i, j, k d'entiers distincts, $\mathbb{R}^3 = D_i \oplus D_j \oplus D_k$, où D_i désigne la direction de la droite Δ_i.

On dit qu'une droite affine Δ est une *sécante* de la famille $(\Delta_i)_{1\leq i\leq k}$ si $\Delta \cap \Delta_i$ est un singleton pour tout $1 \leq i \leq k$. Sur le cube unité, on considère

— D_1 la droite affine passant par $(0, 0, 1)$ dirigée par $\vec{e_1}$,

— D_2 la droite affine passant par $(1, 0, 0)$ dirigée par $\vec{e_2}$,

— D_3 la droite affine passant par $(0, 1, 0)$ dirigée par $\vec{e_3}$,

— D_4 la droite affine passant par $(1, 1, 1)$ dirigée par $\vec{e} = (1, -1, 1)$.

1. (a) Donner, dans le repère canonique $((0, 0, 0); B)$ un système d'équations cartésiennes pour chaque droite D_i, $1 \leq i \leq 4$.

   (b) La famille $(D_i)_{1\leq i\leq 4}$ est-elle en position générale ?
2. Montrer, en les déterminant, que la famille $(D_i)_{1\leq i\leq 4}$ admet exactement deux sécantes.
3. Donner explicitement une droite affine D_5 telle que $(D_i)_{1\leq i\leq 5}$ soit en position générale et n'admette pas de sécante.

Exercice 9. Le jeu *SET* est basé sur un jeu de 81 cartes où chaque carte est caractérisée par quatre propriétés (nombre, forme, couleur, remplissage), chacune pouvant prendre trois valeurs. Une combinaison gagnante (appelée *SET*) est un ensemble de trois cartes distinctes $\{A, B, C\}$ tel que, pour chacune des trois propriétés, les valeurs des cartes sont soit toutes identiques, soit toutes distinctes.
Pour chaque propriété, on identifie chacune des valeurs à un élément de $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. L'ensemble des cartes du jeu est donc en bijection avec l'ensemble $\mathcal{E} = \mathbb{K}^4$, que l'on munit de sa structure canonique d'espace affine.

1. Montrer que trois cartes forment un *SET* si et seulement si les points correspondants sont alignés dans $\mathcal{E}$.
2. Montrer que, étant données deux cartes $A \neq B$, il existe une unique carte C telle que $\{A, B, C\}$ est un *SET*.
3. Combien y a-t-il de *SET* possibles ?
4. Un théorème démontré par Pellegrino en 1971 affirme que le cardinal maximal d'un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ qui ne contient aucune droite affine est égal à 20. Quelle conséquence peuvent en tirer les joueurs de SET ?

Exercice 10 (Réunion finie d'espaces affines)**.** Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. À quelle condition $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est-il un sous-espace affine ?
2. Même question avec $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Dans un espace affine de dimension supérieure ou égale à 3, on considère n droites ($n \geq 2$). On suppose que deux droites de cette famille ont toujours un points commun.
Montrer que, soit toutes ces droites ont un point commun, soit elles sont coplanaires.

Exercice 12 (Homothétie)**.** Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même. On suppose que l'image par f de tout vecteur est un vecteur qui lui est colinéaire.

1. Écrire cette hypothèse avec des symboles mathématiques et des quantificateurs.
2. Écrire en termes analogues la définition d'une homothétie (vectorielle).
3. Comparer les deux écritures et démontrer que f est, quand même, une homothétie.

Exercice 13. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soient ABC 3 points non alignés du plan affine. Les trois droites (AB), (AC) et (BC) délimitent 7 régions du plan. Connaissant les coordonnées barycentriques d'un point dans la base affine (A, B, C), comment déterminer à quelle région il appartient ?

Exercice 14. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine. Définir les médianes du triangle ABC et montrer qu'elles s'intersectent en un unique point.

Exercice 15. Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On appelle bimédiane du tétraèdre ABCD les droites passant par les milieux de deux arêtes disjointes du tétraèdre. Montrer que les trois bimédianes s'intersectent en un unique point.

Exercice 16. (Exercice difficile) Soit un ensemble fini de points du plan affine $\mathbb{R}^2$ ayant la propriété suivante : toute droite qui contient deux des points en contient au moins trois. Montrer que tous les points sont alignés. Donner un exemple de corps pour lequel l'énoncé analogue est faux.

Exercice 17.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $A = (1, 1)$ et $B = (2, 1)$. Donner une équation cartésienne de la droite passant par ces points.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $A = (1, 2, -3)$, $B = (4, -5, -2)$ et $C = (3, -2, -3)$. Donner une équation du plan contenant ces trois points.

Exercice 18. Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $P = (x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Exercice 19.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit $A = (x_A; y_A; z_A)$ un point, $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant A et engendré par u_1 et u_2 si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

2. En s'inspirant de l'exercice précédent, exprimer une équation du plan (ABC) par l'annulation d'un déterminant 4×4, où $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ et $C = (x_C, y_C, z_C)$ sont des points non-alignés.