Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit $\mathcal{A}$ une partie compacte de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$ est compact.

Exercice 2 (Théorème de Radon)**.** Dans un espace affine réel de dimension n, on considère une partie $\mathcal{A}$ de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{conv}(\mathcal{B}) \cap \mathrm{conv}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.
Indication : *écrire une relation affine entre les points de $\mathcal{A}$ et séparer la partie avec des poids positifs de celle contenant des poids négatifs.*

Exercice 3 (Théorème de Gauss–Lucas)**.** Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on appelle enveloppe convexe de P et la note $\mathrm{conv}(P)$, l'enveloppe convexe des racines de P vues comme éléments du plan affine réel $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

1. Ecrire la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicités respectives.
2. En déduire que $\mathrm{conv}(P') \subseteq \mathrm{conv}(P)$.

Exercice 4 (Caractérisation des dilatations)**.** Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension au moins égale à 2 et φ une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que l'image de toute droite soit une droite qui lui est parallèle.
Montrer que φ est une dilatation (c'est-à-dire une translation ou une homothétie).

Exercice 5. Dans un espace affine de dimension 3, on considère un ensemble $\mathcal{T} = \{A, B, C, D\}$ formé de quatre points affinement indépendants.
Démontrer que l'ensemble des applications affines qui préservent $\mathcal{T}$ est un groupe isomorphe au groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

Exercice 6. Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit φ une application affine telle que $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(C) = A$.

1. Est-elle complètement déterminée ? Est-elle injective ?
2. Donner une description simple de φ^3.
3. Montrer que φ a un point fixe.
4. Quelle est la matrice de φ dans le repère d'origine A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

Exercice 7. On se place dans un plan muni d'un repère affine.

1. Déterminer l'expression d'une application affine qui transforme le parallélogramme délimité par les droites $y = 2x+1$, $y = 2x+3$, $x = 3y$ et $x = 3y+4$ en le "carré" de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.
2. Peut-on transformer n'importe quel quadrilatère en un "carré" par une application affine ?

Exercice 8 (Table de composition des dilatations)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On rappelle que le groupe des dilatations de $\mathcal{E}$ est formé des translations $\{\tau_{\overrightarrow{u}} : \overrightarrow{u} \in E\}$ et des homothéties $\{h_{M,\lambda} : M \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}\}$.
Pour des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, des points M, N et des scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$, déterminer $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$, $h_{M,\lambda} \circ \tau_{\vec{u}}$, $\tau_{\vec{u}} \circ h_{M,\lambda}$ et $h_{M,\lambda} \circ h_{N,\mu}$.

Exercice 9 (Points fixes)**.** Soit O un point d'un $\mathbb{K}$-espace affine $\mathcal{E}$ et l une application linéaire de E.

1. Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $f(O) = O$ et $\overrightarrow{f} = l$.
2. En déduire que toute application affine ϕ de $\mathcal{E}$ dans lui-même s'écrit de façon unique sous la forme $\phi = \tau_u \circ \psi$ où ψ fixe O.
3. Montrer que l'ensemble $\mathrm{GA}_O(\mathcal{E})$ des bijections affines de $\mathcal{E}$ qui fixent O est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ isomorphe à $\mathrm{GL}(E)$.
4. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Montrer que f a un unique point fixe dans $\mathcal{E}$ si et seulement si 1 n'est pas une valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 10. Quel est le centre du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$?

Exercice 11 (Théorème «fondamental» de la géométrie affine)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension ≥ 2 et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une bijection qui préserve l'alignement (c'est-à dire que si A, B, C sont trois points alignés, leurs images $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sont alignées). On veut montrer que f est affine.

1. Montrer que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine, alors $f(\mathcal{F})$ est aussi un sous-espace affine. Montrer que $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ ont même dimension.
2. Montrer que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles, alors $f(\mathcal{D})$ et $f(\mathcal{D}')$ sont deux droites parallèles.
3. Soient A_0 et A_1 deux points distincts de $\mathcal{E}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $A_\lambda = A_0 + \lambda\overrightarrow{A_0A_1}$. On définit une fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule
$$\sigma(\lambda) = \frac{\overline{f(A_0)f(A_\lambda)}}{\overline{f(A_0)f(A_1)}}$$
Montrer que σ est un automorphisme de corps de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que c'est une bijection vérifiant $\sigma(s+t) = \sigma(s) + \sigma(t)$ et $\sigma(st) = \sigma(s)\sigma(t)$ pour tous réels s, t.
4. Montrer que le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité. En déduire que f est affine.
5. Donner un exemple de bijection du plan affine complexe $\mathbb{C}^2$ qui préserve l'alignement mais qui n'est pas affine.

Exercice 12 (Projections)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines dirigés par F et G tels que $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.
2. On définit l'application $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $p(M) = \mathcal{F} \cap (M + G)$. Montrer qu'on a l'équivalence
$$M' = p(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{F} \\ \overrightarrow{MM'} \in G \end{cases} .$$
Cette application est appelée la *projection affine* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.
3. Une application affine $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une projection affine si et seulement si sa partie linéaire est une projection vectorielle **et** elle possède au moins un point invariant.
4. Montrer l'équivalence
$$p \text{ est une projection affine } \Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ est une application affine} \\ p^2 = p \end{cases} .$$
5. Pour $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, construire une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $\overrightarrow{f}$ est une projection mais f n'en est pas une.

Exercice 13 (Symétries)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines dirigés par F et G tels que $E = F \oplus G$. Soit σ la symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

1. Montrer que σ est une application linéaire et une *involution.*

2. On choisit un point $O \in \mathcal{F}$ et on pose $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application définie par $\overrightarrow{Os(M)} = \sigma(\overrightarrow{OM})$. Vérifier que pour tout point $O' \in \mathcal{F}$ on a l'équivalence
$$\overrightarrow{OM'} = \sigma(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M'} = \sigma(\overrightarrow{O'M}).$$

3. Montrer que s est une application affine (symétrie affine) qui ne dépend pas du choix de O.

4. Montrer l'équivalence
$$s \text{ est une symétrie affine } \Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est une application affine} \\ s^2 = \mathrm{Id} \end{cases}.$$

Exercice 14 (Théorème de Céva)**.** Soient A, B, C trois points affinement indépendants d'un espace affine. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points, distincts de A, B, C. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 15 (extrait du partiel de mars 2025)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On rappelle qu'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une dilatation si l'application linéaire associée est $\lambda \mathrm{id}_E$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note $\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ le groupe des dilatations de $\mathcal{E}$.

1. Soit $f \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$. Montrer que l'on a $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ si et seulement si $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. On dit alors que $\mathcal{D}$ est stable par f.
2. Soit $f \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ et soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites affines distinctes, de directions respectives D_1 et D_2. On suppose que $f \neq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont stables par f.
   (a) Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en M, montrer que f est une homothétie de centre M.
   (b) Si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$, montrer que f est une translation de vecteur $u \in D_1 \cap D_2$.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de direction D. On note $S = \{f \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E}) \ : \ \mathcal{D} \text{ est stable par } f\}$. Montrer que S est le sous-groupe de $\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ formé des translations de vecteur appartenant à D et des homothéties de centre appartenant à $\mathcal{D}$. Ce sous-groupe est-il commutatif ?

Exercice 16 (extrait du partiel de mars 2025)**.** Dans un plan affine $\mathcal{E}$ de direction E, on considère deux triplets de droites (D_1, D_2, D_3) et (D'_1, D'_2, D'_3) concourantes respectivement en O et O'. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une bijection affine du plan envoyant le premier triplet sur le second.

1. Soient A (resp. A') un point de D_1 (resp. D'_1) distinct de O (resp. O'), B (resp. B') son projeté sur D_2 (resp. D'_2) parallèlement à D_3 (resp. D'_3), C (resp. C') son projeté sur D_3 (resp. D'_3) parallèlement à D_2 (resp. D'_2).
   Montrer que $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(O', \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$ sont deux repères du plan. Donner les coordonnées de A dans le premier repère et celles de A' dans le second.
2. En déduire qu'il existe une unique bijection affine f du plan telle que $f(O) = O'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(A) = A'$.
3. Montrer que pour $i = 1, 2, 3$, $f(D_i) = D'_i$.
4. Si f et g sont deux bijections affines du plan telles que $f(D_i) = D'_i$ et $g(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3$, montrer que $h = f^{-1} \circ g$ est une homothétie de centre O (on pourra considérer les images par h des points O, A, B et C).