Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Décrire l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ lorsque E a dimension 0 ou 1.

Exercice 2. Soit E un k-espace vectoriel.

1. Montrer que deux formes linéaires non nulles sur E sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau.
2. En déduire que l'ensemble des hyperplans vectoriels de E s'identifie naturellement à $\mathbf{P}(E^*)$.

Exercice 3. Montrer que dans un plan projectif sur un corps fini, il y a autant de points que de droites.

Exercice 4. Dobble. Le jeu de cartes «Dobble» est formé de cartes ayant la propriété suivante : chaque carte contient 8 symboles, et deux cartes distinctes quelconques ont exactement un symbole en commun.

1. Comment construire un ensemble de cartes ayant cette propriété à l'aide de la géométrie projective sur un corps fini ?
2. Combien de cartes construit-on ainsi ?
3. Pour des raisons de coût de production, les jeux vendus dans le commerce contiennent seulement 55 cartes. Comment feriez-vous pour trouver les cartes «manquantes» ? Si vous possédez un jeu de Dobble, faites-le.

Exercice 5. Sous-espaces projectifs.

1. Montrer que si X et Y sont deux sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(V)$, alors $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(X \cap Y) + \dim \mathrm{proj}(X \cup Y)$.
2. Soit H un hyperplan projectif de $\mathbf{P}(V)$ et $p \in \mathbf{P}(V) \setminus H$. Montrer que toute droite projective passant par p rencontre H en un unique point.
3. Montrer que si $H_1, \ldots, H_n$ sont des hyperplans projectifs d'un espace projectif de dimension n, alors $H_1 \cap \cdots \cap H_n \neq \emptyset$.

Exercice 6. Soient $\mathbf{P}(E)$ un espace projectif de dimension 3 et D_1, D_2, D_3 trois droites projectives de $\mathbf{P}(E)$ telles que $D_i \cap D_j = \emptyset \ i \neq j$.

1. Montrer qu'une telle situation existe.
2. Montrer que, pour tout $x \in D_1$, il existe une unique droite projective passant par x et rencontrant D_2 et D_3. On la note D_x.
3. Pour $x, y \in D_1$, calculer $D_x \cap D_y$.

Exercice 7. Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre espaces vectoriels et $h = \mathbf{P}f : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(W)$ l'application projective associée. Montrer que l'image d'un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(V)$ par h est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(W)$ de même dimension. Que se passe-t-il pour l'image réciproque ?

Exercice 8. Montrer qu'une homographie d'un $\mathbf{C}$-espace projectif (de dimension finie) a toujours un point fixe. Montrer qu'une homographie d'un $\mathbf{R}$-espace projectif de dimension paire a aussi toujours un point fixe. Qu'en est-il en dimension impaire ?