Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

UE de Géométrie

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. On identifie $\mathbf{P}^1(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

1. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}^1(\mathbb{K})$ qui préservent ∞ ?
2. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}^1(\mathbb{K})$ qui préservent 0 ?
3. Soient A et B deux points distincts de $\mathbf{P}^1(K)$. Montrer que le sous-groupe de $PGL(2, \mathbb{K})$ formés des homographies préservant A et B est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$.

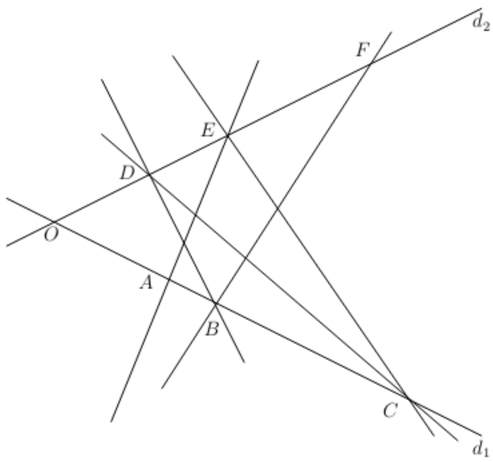
Exercice 2. On considère un plan projectif muni d'un repère projectif (A, B, C, D). Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit P_i un point de coordonnées homogènes $(x_i : y_i : z_i)$ dans ce repère. Montrer que P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 3. Soit n un nombre entier strictement positif, et soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Considérons $n + 2$ points P_0, . . ., P_{n+1} de l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$. Montrer que $(P_0, ..., P_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbf{P}(E)$ si et seulement si, pour tout $i \neq j$ dans $\{0, \ldots, n + 1\}$, on a

$$P_i \notin \operatorname{proj}\{P_k \,:\, k \neq i, k \neq j\}$$

Exercice 4. Soient d_1 et d_2 deux droites distinctes d'un plan projectif réel. Notons O leur point d'intersection. Soient A, B, C des points de d_1 et D, E, F des points de d_2, deux à deux distincts et distincts de O. La figure ci-dessous contient sept droites : d_1, d_2, (AE), (BD), (BF), (CD) et (CE).



Redessiner cette figure après avoir envoyé à l'infini

(1) les points A et F ; (2) la droite (BD) ; (3) la droite d_1.

Exercice 5 (Birapports). 1. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points distincts d'une droite projective. On note $\lambda = [A_1, A_2, A_3, A_4]$ leur birapport. Pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, calculer le birapport $[A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)}]$.

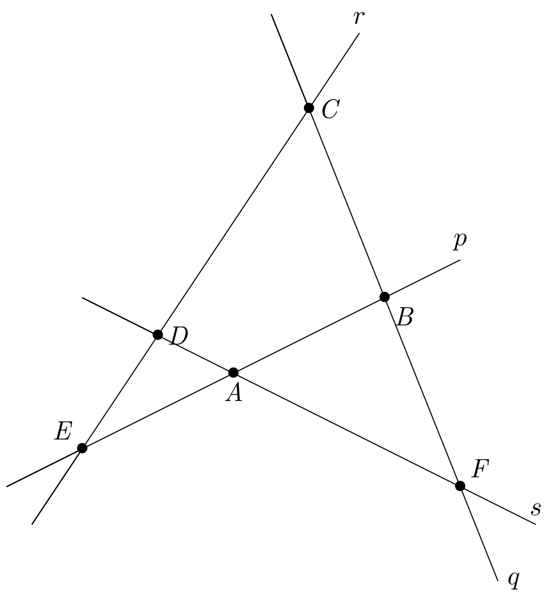
2. Soit cinq points distincts A, B, C, D, E d'une droite projective. Calculer $[A, B, C, D][A, B, D, E][A, B, E, C]$.

On dit que quatre points A, B, C, D sont en *division harmonique* si $[A;B;C;D] = -1$ (noter que l'ordre des points est important).

Exercice 6. Dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, que veut dire géométriquement le fait que A, B, C, ∞ sont en division harmonique ?

Exercice 7. Soit (A, B, C, D) un repère projectif d'un plan projectif. Soit $P = (AB) \cap (CD)$, $Q = (AD) \cap (BC)$ et $R = (AC) \cap (BD)$. Notons aussi $S = (AC) \cap (PQ)$. Montrer que les quatre points A, C, R, S sont en division harmonique. **Indication**. Envoyer (PQ) à l'infini et utiliser l'exercicee précédent.

Exercice 8. Tracer la figure duale de la figure suivante (on notera a la droite dual du point A ; P le point dual de la droite p, etc)



Exercice 9. Soit ϕ une homographie de $\mathbf{P}^1(\mathbb{K})$ différente de l'identité. Montrer qu'il y a équivalence entre

1. ϕ est une involution
2. ϕ est de trace nulle (c'set à dire que si $\phi = \mathbf{P}(f)$ pour $f \in M_2(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{tr} f = 0$)
3. il existe un point $p \in \mathbf{P}^1(\mathbb{K})$ tel que $\phi(p) \neq p$ et $\phi(\phi(p)) = p$.

Exercice 10.

1. Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan affine $\mathcal{P}$, sécantes en un point O. Soient O' un point qui n'est sur aucune des deux droites, D_1, D_2, D_3 des droites deux à deux distinctes passant par O'. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soient les points $M_i = D \cap D_i$ et $M'_i = D' \cap D_i$ puis $A = (M_1 M'_2) \cap (M_2 M'_1)$ et $B = (M_2 M'_3) \cap (M_3 M'_2)$. Montrer que les points O, A, B ont alignés.
   Indication. Plonger $\mathcal{P}$ dans un plan projectif et envoyer (OO') à l'infini.
2. Sur une feuille de papier, soit deux droites non parallèles dont le point d'intersection est en dehors de la feuille, et soit M un point qui n'est aucune des deux droites. Commnt tracer à l'aide d'une règle la droite passant par M et l'intersection des deux droites ?
3. En déduire par dualité un procédé pour tracer une droite joignant deux points à l'aide d'une règle trop courte.