
Feuille d'exercices n^o 5

Exercice 1. Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$ et p, q des réels vérifiant $p+q=1$. Un point $G \in \mathcal{E}$ est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B \\ p & q \end{pmatrix}$ si et seulement si on a l'égalité

$$p \cdot OA^2 + q \cdot OB^2 = OG^2 + p \cdot GA^2 + q \cdot GB^2$$

pour tout $O \in \mathcal{E}$. En déduire que toute isométrie (supposée bijective) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est affine.

Exercice 2. Soit $G < \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ un sous-groupe fini. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{E}$ fixé par tous les éléments de G.

Dans la suite de la feuille, $\mathcal{E}$ désigne un plan affine euclidien orienté.

Exercice 3. Soit ABC un triangle non aplati (ce qui revient à dire que les trois points A, B, C sont non alignés).

1. Montrer que les trois médianes de ABC sont concourantes. Leur intersection est le *centre de gravité* du triangle ABC.
2. Montrer que les trois médiatrices de ABC sont concourantes. Leur intersection est le *centre du cercle circonscrit* au triangle ABC.

Exercice 4. Si $A \neq B$ sont deux points distincts de $\mathcal{E}$. On appelle demi-droite $[AB)$ l'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ pour $\lambda \geq 0$.

1. Si A, B, C sont trois points non alignés, montrer qu'il existe une unique réflexion $\sigma_{\mathcal{D}}$ qui échange les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. On appelle la droite $\mathcal{D}$ la bissectrice de ces demi-droites. Combien de réflexions échangent les droites (AB) et (AC) ?
2. Si ABC est un triangle non aplati, définir les trois bissectrices du triangle et montrer qu'elles s'intersectent en un point qui est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B & C \\ BC & AC & AB \end{pmatrix}$. C'est le *centre du cercle inscrit* au triangle ABC.

Exercice 5. Soit ABC un triangle non aplati. On appelle *hauteurs* les droites passant par un sommet et perpendiculaires au sommet opposé. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes ; leur intersection s'appelle l'*orthocentre* du triangle ABC.

Indication. *Considérer le triangle obtenu en traçant les parallèles à un côté passant par le sommet opposé*

Exercice 6. Étant donnés des points $A_1, \dots, A_n$ et $\mathcal{E}$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on considère la fonction $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \lambda_1 MA_1^2 + \cdots + \lambda_n MA_n^2$.

1. Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, montrer qu'il existe $\vec{v} \in E$ tel que $f(N) = f(M) + \langle \overrightarrow{MN}, \vec{v} \rangle$ pour tout $N \in \mathcal{E}$.
2. Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$ montrer que $f(M) = f(G) + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) MG^2$ où $G = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
3. Applications : étant donnés deux points distincts A, B et un réel α, déterminer
   (a) L'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = \alpha$
   (b) L'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 - MB^2 = \alpha$
   (c) L'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA = \alpha MB$

Exercice 7. Quelles sont les isométries de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions ?

Exercice 8. On note $\rho_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ. Que vaut la composition $\rho_{B,-\theta} \circ \rho_{A,\theta}$?

Exercice 9. Soit ABC un triangle non aplati. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, et $\alpha = \widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}$, $\beta = \widehat{\vec{BC}, \vec{BA}}$ et $\gamma = \widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}$ les angles associées aux sommets. Alors

1. ABC est isocèle en A (i.e. $b = c$) ssi $\beta = \gamma$
2. ABC est équilatéral (i.e. $a = b = c$) ssi $\alpha = \beta = \gamma$
3. on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (formule d'Al-Kashi)
4. on a $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ (loi des sinus)

Exercice 10. Avec les notations des exercices précédents, que vaut la composée $\rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta} \circ \rho_{C,\gamma}$?

Exercice 11. Est-ce que toute application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui préserve la distance est affine ? (A la différence de l'exercice 1, il n'y a pas d'hypothèse de surjectivité).

Exercice 12. Comment construire à la règle et au compas un cercle, étant donnés

1. trois points ?
2. deux points et une droite tangente ?
3. un point et deux droites tangentes ?
4. trois droites tangentes ?

Exercice 13. Soit ABC un triangle non aplati et $\mathcal{D}$ une droite coupant respectivement (BC), (AC) et (AB) en D et E et F. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ABC, DBF, AEF et DEC sont concourants.

Exercice 14. Soit ABC un triangle non aplati et $S \in \mathcal{E}$. On note P, Q et R les projection orthogonales de S sur les trois côtés. Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si S est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.