

Examen partiel du 12 mars 2026

Durée : 90 minutes

Exercice 1. Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+3a-b & 2a-1 \\ b-a & 2-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Soit n un entier positif non nul. L'ensemble $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est-il un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{E}$ de direction E . Pour $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$, on définit $f_\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ par $f_\sigma(M) = \begin{pmatrix} A & B & C & M \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $M, N \in \mathcal{E}$ on a $(\alpha + \beta + \gamma + 1)\overrightarrow{f_\sigma(M)f_\sigma(N)} = \overrightarrow{MN}$.
2. Montrer que f_σ est une application affine et préciser la nature de f_σ suivant la valeur de σ .
3. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E . Existe-t-il $\sigma \in \mathbb{R}^3$ tel que f_σ soit la translation de vecteur $\vec{v}$? Si oui, est-il unique ?
4. Soient I un point de $\mathcal{E}$ et λ un réel non nul. Existe-t-il σ tel que f_σ soit l'homothétie de centre I et de rapport λ ? Si oui, est-il unique ?

Exercice 3. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{E}$. Les coordonnées barycentriques d'un point de $\mathcal{E}$ seront calculées par rapport à la base affine (A, B, C) .

1. Étant données deux droites $\mathcal{D}_1 = A_1 + D_1$ et $\mathcal{D}_2 = A_2 + D_2$ dont les directions sont respectivement D_1 et D_2 . Montrer que si elles ne sont pas parallèles alors elles se coupent en un unique point.
2. On fixe un point P situé sur la droite (BC) . Dire pourquoi il existe un unique nombre réel λ tel que $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CB}$, et calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques (x, y, z) de P .
3. (a) Soit $\mathcal{D}_1$ la droite parallèle à (BA) passant par P . Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap (CA)$ est formé d'un unique point P_1 et que $\overrightarrow{CP_1} = \lambda \overrightarrow{CA}$.
(b) Calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) de P_1 .
4. Soit de même $P_2 \in (AB)$ l'intersection de (AB) avec la parallèle à (CB) passant par P_1 , et $P_3 \in (BC)$ l'intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par P_2 .
(a) Faire un dessin de cette configuration.
(b) Calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques de P_2 puis de P_3 .
5. Soit $f : (BC) \rightarrow (BC)$ l'application qui à un point P de (BC) associe le point $P_3 = f(P)$ défini à la question précédente.
(a) Quels sont les points fixes de f ?
(b) Calculer $f \circ f$.