Feuille de TD 3

Indépendance (suite), lois usuelles

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 [Partiel Mars 2015]
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, e^{-|x|}\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
2. Donner l'espace d'arrivée de $Y = X^2$ et déterminer sa loi.
3. Soit Z une variable aléatoire ayant même loi que X et indépendante de X. Expliciter la loi du couple (Y, Z).

Exercice 2 [Partiel Mars 2015]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ (On rappelle que X est de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$).

1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de T^{-1} si T est une variable aléatoire de loi de Cauchy. (Une v.a. X est de loi de Cauchy si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$).
3. Déterminer la loi de $Z = X^2 + Y^2$.

Exercice 3
Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (Rappel : $\mathbb{P}_{X_1}(\mathrm{d}x) = \lambda \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.)

1. Calculer la loi de $\max\limits_{i=1,\dots,n} X_i$.
2. Calculer la loi de $\min\limits_{i=1,\dots,n} X_i$.

Exercice 4
Soit X une v.a.

1. Supposons que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Si $\Lambda_n \in \mathcal{F}$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) = 0.$$
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_n} |X|\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$.
2. On NE suppose PAS que $\mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|}\right] < \infty$. Montrer que
$$\lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|}\mathbf{1}_{\{|X|>y\}}\right] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} y\mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|}\mathbf{1}_{\{|X|>y\}}\right] = 0.$$
3. Soit $r > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X|^r] = \int_0^\infty r x^{r-1}\mathbb{P}(|X| > x)\mathrm{dx}.$$

4. Supposons que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ pour un certain $p > 0$. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x^p \mathbb{P}(|X| > x) = 0.$$
Réciproquement, si $\lim_{x\to\infty} x^p \mathbb{P}(|X| > x) = 0$, montrer que pour tout $q \in]0, p[$,
$$\mathbb{E}[|X|^q] < \infty.$$

Exercice 5 [Lois Gamma, Exponentielle et Gaussienne]
Une variable aléatoire X suit une *loi gamma de paramètres* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, si elle admet une densité sur $\mathbb{R}_*^+$ de la forme $f(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, et $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$. Montrer que $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes, et déterminer la loi de U. On pourra utiliser l'identité suivante :
$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} = \int_0^1 v^{\alpha_1 - 1}(1 - v)^{\alpha_2 - 1} dv.$$
3. Calculer, pour $t < \beta$, $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.
4. On admet que la fonction caractéristique de X est $\varphi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha$. Retrouver la loi de la variable U définie dans la question 2).
5. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v.a. indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?
6. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que Y^2 est de loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (On pourra utiliser la relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).
7. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Quelle est la loi de $Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2$? Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.