Feuille de TD 4

Lemme de Borel-Cantelli, Convergences p.s., en probabilité, en L^p

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.
On rappelle que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que $X_n \to \infty$, $\mathbb{P}$-p.s. si et seulement si

$$\forall M > 0,\ \mathbb{P}(\limsup_n \{X_n < M\}) = 0.$$

2. Supposons que les v.a. X_n, $n \geq 1$ sont indépendantes et que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$

   (a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \to 0$.
   (b) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.

Exercice 2
Montrer que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie identique, la séquence PFP (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. Préciser ce résultat à l'aide de la loi faible des grands nombres.

Exercice 3
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit les événements $A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et déterminer l'ensemble $\limsup_n A_n$.
2. En déduire un contre-exemple du second lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 4
Soit $\alpha > 0$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi

$$\mathbb{P}_{Z_n} = \frac{1}{n^\alpha}\delta_1 + \Big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\Big)\delta_0.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
2. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\limsup_n Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \leq 1. \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 5 Convergence en probabilité, dans L^p

A- Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires. Soit $p > 0$.

1. Montrer que si X_n converge dans L^p vers 0, alors X_n converge en probabilité vers 0.
2. Réciproquement, si X_n converge en probabilité vers 0 et si
$$\sup_{n\geq 1} |X_n| \leq Y \in L^p(\mathbb{P}),$$
montrer que X_n converge dans L^p vers 0.
3. Montrer l'équivalence suivante :
$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] \to 0.$$
4. Montrer que si
$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \text{ et } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y,$$
alors $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s.

B- Soit Y_n, $n \geq 1$ une autre suite de variables aléatoires. On suppose que X_n converge en probabilité vers X, et Y_n converge en probabilité vers Y.

1. Montrer que
$$X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \pm Y.$$
2. Montrer que
$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY.$$

C- Pour deux variables aléatoires X et Y, on définit
$$d(X,Y) := \mathbb{E}\Big[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\Big].$$
Montrer que $d(X,Y)$ fournit une distance sur l'ensemble des variables aléatoires réelles, c'est-à-dire,

1. $d(X,Y) = 0$ si et seulement si $X = Y$, $\mathbb{P}$-p.s.
2. $d(X,Y) = d(Y,X)$.
3. Pour toutes v.a.r X, Y et Z, on a
$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z).$$

Indication : Remarquer que $d(X,Y) = d(0, Y-X)$.

Exercice 6

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que p.s.,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1.$$
2. On pose $Z_n = \frac{\max(X_1,\cdots,X_n)}{\log n}$ pour tout $n \geq 2$, montrer que
$$\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1, \text{ p.s.}$$
3. Montrer que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 1, \text{p.s.}$$