**Feuille de TD 5**

Lemmes de Borel-Cantelli, loi forte des grands nombres

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Exercice 1**

Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n})dx_1...dx_n$ pour $f$ une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour $f$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.

**Exercice 2**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Montrer l'équivalence :

$$\mathbb{P}(\sup X_n < \infty) = 1 \iff \exists A > 0 \text{ tel que } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > A) < \infty.$$

**Exercice 3 Loi des grands nombres et Borel Cantelli**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, i.i.d.

1. Si $0 < \mathbb{E}[X_1] < \infty$, montrer que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty.$$
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$,
$$\mathbb{E}[X_1] < \infty \iff \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) < \infty.$$
En déduire que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\limsup_n \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathbb{E}[X_1] < \infty. \\ \infty & \text{si} \quad \mathbb{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

**Exercice 4**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives t.q.

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \text{ et } \mathbb{E}[X_n] = an^{\alpha},$$

avec $a, \alpha > 0$. Supposons qu'il existe des constantes $B > 0$, $0 < \beta < 2\alpha$ t.q.

$$\mathrm{Var}(X_n) \leq Bn^{\beta}, \quad \forall n \geq 1.$$

Le but est de montrer que

$$\frac{X_n}{n^{\alpha}} \xrightarrow{\mathbb{P}-p.s.} a.$$

1. Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|X_n - an^\alpha| \geq \delta n^\alpha\Big) \leq \frac{B}{\delta^2} n^{\beta - 2\alpha}, \ \forall n \geq 1.$$

2. Si on prend $n_k = \lfloor k^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \rfloor$, alors

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - an_k^\alpha| \geq \delta n_k^\alpha\Big) < \infty.$$

   En déduire que $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_{n_k}}{n_k^\alpha} = a.$$

3. Conclure à l'aide de la monotonie de $X_n$.

**Exercice 5 Barndorff-Nielsen**

Soit $(A_n; n \geq 1)$ une suite d'événements dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Le but de cet exercice est de montrer que si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ et

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty,$$

alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

1. Montrer que pour tout $m \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \leq \mathbb{P}(\cup_{n\geq m} A_n).$$

2. Montrer que

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq m} A_n) \leq \mathbb{P}(A_m) + \sum_{n\geq m} \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

3. Conclure.