Feuille de TD 8
Théorème de P. Lévy, TCL, Estimation

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Si

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

montrer que

$$\sigma_n^2 \to \sigma^2.$$

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et calculer $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.
2. On pose $Z_n = \frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. dont on précisera la loi.
3. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ où

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k$$

vers une loi qu'on explicitera.

Exercice 4
Deux candidats sont en lice pour la prochaine élection, A et B. Un sondage donne A gagnant avec 55% des voix contre 45 à son adversaire. On va construire un intervalle de confiance pour la proportion de votants en faveur de A, au niveau $1 - \alpha = 95\%$.

1. Modéliser ce problème et donner un estimateur de cette proportion.
2. Supposons que 250 personnes ont été sondées. Donner l'intervalle de confiance au niveau 95%.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes. Pour $n \geq 1$, on définit

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

La loi de X_k est donnée pour $k \geq 2$ par

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{k^2}\Big),\ \mathbb{P}(X_k = k) = \mathbb{P}(X_k = -k) = \frac{1}{2k^2}$$

et

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Var}(S_n) = 2.$$
2. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) = 0,$$
en déduire que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k \mathbf{1}_{|X_k|\geq k}}{\sqrt{n}} = 0$$
3. Expliciter la loi de $X_k\mathbf{1}_{|X_k|<k}$, en déduire la fonction caractéristique de $X_k\mathbf{1}_{|X_k|<k}$.
4. Montrer que
$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k \mathbf{1}_{|X_k|<k}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1),$$
en déduire que
$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Indication :

$$\Big|\mathbb{E}e^{itX} - \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}\frac{(itX)^m}{m!}\Big| \leq \mathbb{E}\min\left\{\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|tX|^n}{n!}\right\}.$$