Partiel du 4 avril 2017 - Durée : 2 heures

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Questions de cours. *On attend une rédaction parfaite, tout oubli sera sanctionné.*
1 - Enoncer la loi forte des grands nombres.
2 - Enoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli.

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ la loi Normale d'espérance 0 et de variance σ^2.

On rappelle que sa densité est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

A - Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On note ϕ_X la fonction caractéristique de X.

(1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X'(t) = -(t\sigma^2)\ \phi_X(t).$$

(2) En déduire ϕ_X.

B - Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.

(1) Déterminer la loi de $U = X_1 + X_2$.
(2) Expliciter la loi de $V = \frac{X_1}{X_2}$.
(3) Expliciter la loi du couple (U, V).
Les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $\frac{X_1}{X_2}$ sont-elles indépendantes?

Exercice 2. On rappelle que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Cauchy (qui a pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$) est donnée par la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = e^{-|t|}.$$

Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}$.
(2) La suite de variables aléatoires $\left(\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement? Justifier.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

On suppose qu'il existe une variable aléatoire Y telle que la suite (S_n/n) converge presque sûrement vers Y.

(1) Montrer que X_n/n tend presque sûrement vers 0.
Indication: *calculer* $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$.

(2) En déduire que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| \geq n)$$

est convergente.

(3) Montrer que

$$\mathbf{E}[|X_1|] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(|X_1| \geq n).$$

(4) Déterminer la loi de Y.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $]0, +\infty[$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{X_k}{S_n}$ et $\frac{X_1}{S_n}$ ont la même loi.

(2) Montrer que si $m \leq n$, alors

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_m}{S_n}\right] = \frac{m}{n}$$