Université Lyon 1 Mathématiques
L3 Probabilités et Statistiques

Examen du 26 juin 2017
Durée : 1 heure 30.

Tous les documents sont interdits.

Exercice 1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, et X une variable aléatoire.

1. Que signifie l'énoncé « (X_n) converge vers X en loi » ?
2. Que signifie l'énoncé « (X_n) converge vers X en probabilité » ?
3. Que signifie l'énoncé « (X_n) converge vers X presque sûrement » ?
4. Démontrez une implication (au choix) entre ces trois notions de convergence.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^1. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout n, Y_n est intégrable.
2. Montrer que l'on a la convergence presque sûre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n-1}}{n} = \mathbf{E}Y_1$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_2 + Y_4 + \cdots + Y_{2n}}{n} = \mathbf{E}Y_1.$$
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel–Cantelli que Y_n/n tend presque sûrement vers 0. *On rappelle la formule suivante : si X est une variable aléatoire positive, alors $\mathbf{E}X = \int_0^\infty \mathbf{P}(X \geqslant t)\,\mathrm{d}t$.*
4. Montrer que l'on a la convergence presque sûre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \mathbf{E}Y_1$$

Exercice 3

On admet que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Cauchy (qui a pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$) est donnée par la fonction
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = e^{-|t|}.$$

Soit $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}$.
2. La suite de variables aléatoires $\left(\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle presque sûrement vers une v.a. constante ? Justifier.

Exercice 4

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et calculer $\mathbf{P}(S_n \leqslant n)$.
2. On pose $Z_n = \frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.
3. En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$