Université Lyon 1 Mathématiques
L3 Probabilités et Statistiques

Examen du 9 mai 2017
Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits.

Rappels. Une variable aléatoire X
... suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\mathbf{P}(X=k) = p(1-p)^k$.
... suit une loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$ si la densité de X est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Dans ce cas, la fonction caractéristique de X est donnée pour $t \in \mathbf{R}$ par $\Phi_X(t) = \exp\left(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$.

Exercice 1

Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ des variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On suppose que les variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{Y_n : n \in \mathbf{N}\}$ sont indépendantes. On définit une variable aléatoire N par

$$N = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 1 \text{ ou } Y_n = 1\}$$

1. Déterminer la loi de N.
2. Soit $n \geqslant 0$. Réexprimer l'événement

$$\{N = n, X_N = 1, Y_N = 0\}$$

   (*on rappelle que les virgules se lisent «et»*) en fonction de $X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n$ et en déduire sa probabilité.
3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X_N = 1, Y_N = 0)$.
4. Calculer $\mathbf{P}(X_N = 0, Y_N = 0)$, $\mathbf{P}(X_N = 0, Y_N = 1)$ et $\mathbf{P}(X_N = 1, Y_N = 1)$.
5. En déduire une méthode, à l'aide d'une pièce de monnaie non biaisée, pour tirer un nombre au hasard dans $\{1, 2, 3\}$ de façon équiprobable.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^1. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout n, Y_n est intégrable.
2. Montrer que l'on a la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}}{n} = \mathbf{E}Y_1$$

   et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_2 + Y_4 + \cdots + Y_{2n+2}}{n} = \mathbf{E}Y_1.$$

3. Montrer à l'aide du lemme de Borel–Cantelli que Y_n/n tend presque sûrement vers 0. *On rappelle la formule suivante : si X est une variable aléatoire positive, alors* $\mathbf{E}X = \int_0^\infty \mathbf{P}(X \geqslant t)\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que l'on a la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \mathbf{E}Y_1$$

Exercice 3

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi. Montrer que cette suite est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout n, $\mathbf{P}(|X_n| \geqslant K) \leqslant \varepsilon$.
2. Montrer que si (X_n) est une suite tendue de variables aléatoires et si (Y_n) tend vers 0 en probabilité, alors $(X_n Y_n)$ tend vers 0 en probabilité.

Exercice 4

Soient X, Y deux variables aléatoires i.i.d. L^2 ayant la propriété que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a même loi que X. On pose $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$.

1. Vérifier que la loi gaussienne $N(0, \sigma^2)$ a la propriété requise. Le but de l'exercice est de montrer que c'est la seule loi ayant cette propriété.
2. Montrer que $\mathbf{E}X = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $X_1, \ldots, X_{2^n}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi que X, alors la variable aléatoire
$$\frac{1}{2^{n/2}} \left(X_1 + \cdots + X_{2^n}\right)$$
a même loi que X.
4. Conclure.

Exercice 5

Soit $\theta > 0$ un paramètre inconnu, et soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de densité f_θ donnée par
$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \mathbf{1}_{]0,\theta]}(x).$$

1. Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.
2. On définit une suite de variables aléatoires $(\tilde{\theta}_n)_{n \geqslant 1}$ par la formule
$$\tilde{\theta}_n = \frac{3(X_1 + \cdots + X_n)}{n}.$$
   (a) Calculer l'espérance et la variance de $\tilde{\theta}_n$.
   (b) Montrer que $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
3. On définit un autre estimateur $\hat{\theta}$ par la formule suivante, pour $n \geqslant 1$,
$$\hat{\theta}_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$.
   (b) Est-ce que $\hat{\theta}$ est sans biais ?
   (c) Est-ce que $\hat{\theta}$ est consistant ?
   (d) Quelle est la vitesse de $\hat{\theta}$?
   (e) Comparez les estimateurs $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$.