Feuille de TD 1

Théorème de transfert, Lois, Fonction de répartition.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1

Soit $X : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$ une v. a. de Bernoulli de loi $\mathbb{P}_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.

1. Calculer $\mathbb{E}(|X|)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X^n)$ existe et calculer sa valeur.
3. Soit $n \geq 1$ un entier fixé, on note $Y = X^n + 1$. Montrer que Y est une variable aléatoire de Bernoulli et explicitez sa loi. En déduire $\mathbb{E}(Y^2)$.

Exercice 2

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_U = \mathrm{d}x$, où $\mathrm{d}x$ est la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$. On dit que U a pour loi la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. On fixe $a > 0$. Calculer $\mathbb{E}(U^a)$.
2. On fixe $a > 0$ puis on note $V = U^a$. Explicitez la loi de la v. a. $V : \Omega \longrightarrow [0, 1]$.
3. En déduire $\mathbb{E}(V^2)$.

Exercice 3

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ de loi uniforme. Donnez la loi de la v.a. $X = (-2) \times \mathbf{1}_{[0,1/3]}(U) + \mathbf{1}_{]1/3,1]}(U)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{E}X^n$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = (1 - p)p^n.$$

1. Calculer la probabilité que X soit paire.
2. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}(e^{-tX})$.
3. On pose
$$Z = |\cos(\pi X/2)|.(X/2)$$
Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 6 Loi de Weibull, Loi de Gumbel
Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi

$$\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \frac{2}{\lambda^2}\, x\, e^{-(x/\lambda)^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}x.$$

On l'appelle la loi de Weibull de paramètre $(2, \lambda)$.

1. Calculer sa fonction de répartition F_X. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X^2 \leq 1)$.
2. Expliciter la loi de $Y = X^2$.
3. Expliciter la loi de $Z = -\log(X)$.

Exercice 7

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Explicitez la loi de $\frac{1}{U}$ et celle de U^2.
2. $(**)$ Soit Z une variable aléatoire vérifiant pour tout $x \geq 1$, $\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(Z < -x)$ et $\mathbb{P}(|Z| > x) = x^{-2}$. Déterminer la fonction de répartition de Z.

Exercice 8
Soit Z une variable aléatoire positive.

1. (Inégalité de Markov) Soit $a > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}.$$
2. $(*)$ Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n) \leq \mathbb{E}(Z) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n).$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit intégrable.
3. On suppose que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n)$.