
Feuille de TD 3
Indépendance (suite), lois usuelles

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 [Partiel Mars 2015]

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X(dx) = \alpha e^{-|x|} dx$.

1. Calculer α .
2. Donner l'espace d'arrivée de $Y = X^2$ et déterminer sa loi.
3. Soit Z une variable aléatoire ayant même loi que X et indépendante de X . Expliquer la loi du couple (Y, Z) .

Exercice 2 [Partiel Mars 2015]

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ (On rappelle que X est de loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$).

1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de T^{-1} si T est une variable aléatoire de loi de Cauchy. (Une v.a. X est de loi de Cauchy si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} la fonction $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$).
3. Déterminer la loi de $Z = X^2 + Y^2$.

Exercice 3

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (Rappel : $\mathbb{P}_{X_1}(dx) = \lambda \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) e^{-\lambda x} dx$).

1. Calculer la loi de $\max_{i=1, \dots, n} X_i$.
2. Calculer la loi de $\min_{i=1, \dots, n} X_i$.

Exercice 4 [Lois Gamma, Exponentielle et Gaussienne]

Une variable aléatoire X suit une *loi gamma de paramètres* $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, si elle admet une densité sur \mathbb{R}_*^+ de la forme $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, et $\Gamma(\alpha) =$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$. Montrer que $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes, et déterminer la loi de U . On pourra utiliser l'identité suivante :

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} = \int_0^1 v^{\alpha_1-1} (1-v)^{\alpha_2-1} dv.$$

3. Calculer, pour $t < \beta$, $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

4. On admet que la fonction caractéristique de X est $\varphi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-it}\right)^\alpha$. Retrouver la loi de la variable U définie dans la question 2).
5. Si X_1, \dots, X_n sont n v.a. indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?
6. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que Y^2 est de loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (On pourra utiliser la relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).
7. Soit Y_1, \dots, Y_n n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Quelle est la loi de $Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2$? Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\text{Var}(Z)$.

Exercice 5 (*)

Soit X une v.a.

1. Supposons que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Si $\Lambda_n \in \mathcal{F}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) = 0.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_n} |X| d\mathbb{P} = 0$.

2. On ne suppose pas que $\mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|}\right] < \infty$. Montrer que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|} \mathbf{1}_{\{|X| > y\}}\right] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} y \mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|} \mathbf{1}_{\{|X| > y\}}\right] = 0.$$

3. Soit $r > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[|X|^r] = \int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(|X| > x) dx.$$

4. Supposons que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ pour un certain $p > 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \mathbb{P}(|X| > x) = 0.$$

Réciproquement, si $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \mathbb{P}(|X| > x) = 0$, montrer que pour tout $q \in]0, p[$,

$$\mathbb{E}[|X|^q] < \infty.$$