
Feuille de TD 4

Lemmes de Borel-Cantelli, Convergences p.s., en probabilité, dans L^p

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.

On rappelle que si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} , alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} , les deux événements $\limsup_n A_n$ et $\{\text{une infinité des } A_n \text{ est réalisée}\}$ sont égaux.
2. Montrer que $X_n \rightarrow \infty, \mathbb{P}$ -p.s. si et seulement si

$$\forall M > 0, \mathbb{P}(\limsup_n \{X_n < M\}) = 0.$$

3. Supposons que les v.a. $X_n, n \geq 1$ sont indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$

- (a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \rightarrow 0$.
- (b) Montrer que

$$\left\{ X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right\} = \left(\limsup_n \{X_n = 1\} \right)^c.$$

- (c) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.

Exercice 2

Montrer que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie identique, la séquence PFP (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. À l'aide de la loi faible des grands nombres, donner la fréquence d'apparition de cette séquence (on pourra rassembler les variables en paquets de variables indépendantes).

Exercice 3

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit les événements $A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et déterminer l'ensemble $\limsup_n A_n$.
2. En déduire un contre-exemple du second lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 4

Soit $\alpha > 0$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi

$$\mathbb{P}_{Z_n} = \frac{1}{n^\alpha} \delta_1 + \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \delta_0.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
2. Montrer que \mathbb{P} -p.s.,

$$\limsup_n Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1. \\ 0 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 5 Convergence en probabilité, dans L^p

A- Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de variables aléatoires. Soit $p > 0$.

1. Montrer que si X_n converge dans L^p vers 0, alors X_n converge en probabilité vers 0.
2. Réciproquement, si X_n converge en probabilité vers 0 et si

$$\sup_{n \geq 1} |X_n| \leq Y \in L^p(\mathbb{P}),$$

montrer que X_n converge dans L^p vers 0.

3. Montrer l'équivalence suivante :

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \iff \mathbb{E} \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \right] \rightarrow 0.$$

4. Montrer que si

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \text{ et } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y,$$

alors $X = Y$ \mathbb{P} -p.s.

B- Soit $Y_n, n \geq 1$ une autre suite de variables aléatoires. On suppose que X_n converge en probabilité vers X , et Y_n converge en probabilité vers Y .

1. Montrer que

$$X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \pm Y.$$

2. Montrer que

$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY.$$

Exercice 6

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1.$$

2. On pose $Z_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\log n}$ pour tout $n \geq 2$, montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1, \text{ p.s.}$$

3. (*) Montrer que pour une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k \rightarrow \infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 1, \text{ p.s.}$$