
Feuille de TD 6
Convergence en loi

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1

1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers X alors, pour toute fonction continue g , $(g(X_n))_n$ converge en loi vers $g(X)$.
2. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c , alors la convergence a aussi lieu en probabilité.
3. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n \geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement).

Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $-X$, qui a même loi.

Exercice 2

Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n de fonction de répartition F_n . Est-ce que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi ?

Exercice 3

Soient $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que $n \min(X_1, \dots, X_n)$ converge en loi vers une limite qu'on identifiera.

Exercice 4 Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire X_n de fonction de répartition F_n . Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi et identifier la loi limite.

Exercice 5 : Convergence du maximum de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de variables aléatoires

$$\max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$

converge en loi vers une limite à déterminer.