Feuille de TD 5

Borel-Cantelli, convergence en proba ou p.s, loi forte des grands nombres, processus de branchement.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Processus de branchement Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tels que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. On considère le processus de branchement dont la loi de reproduction est donnée par les p_k. On note $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ et Z_n le nombre d'individus à la génération n. On suppose comme d'habitude $Z_0 = 1$.

1. Donner la probabilité d'extinction dans les cas particuliers suivants.
   (a) $p_2 = 1 - p_0 = p$, $p \in [0, 1]$,
   (b) (*) $p_0 = 1 - b/p$ et $p_k = b(1 - p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, où $p \in [0, 1], b \in [0, p]$.
2. Donner une CNS pour que la probabilité d'extinction soit 0.
3. Calculer l'espérance de Z_n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. (*) Calculer la variance de Z_n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Si T est le nombre total d'individus, calculer $\mathbb{E}[T]$.
6. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n > 0) \leq \mu^n \wedge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Si $\mu = 1$ et $p_1 < 1$, montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{en probab}} 0$. $(Z_n)_n$ converge-t-elle dans $L^1(\mathbb{P})$?
8. Quelle est la probabilité d'extinction si on suppose $Z_0 > 1$?

Exercice 2 Loi des grands nombres et Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, i.i.d.

1. Si $0 < \mathbb{E}[X_1] < \infty$, montrer que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty.$$
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$,
$$\mathbb{E}[X_1] < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) < \infty.$$
   En déduire que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\limsup_n \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathbb{E}[X_1] < \infty. \\ \infty & \text{si} \quad \mathbb{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

Exercice 3
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives t.q.

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \text{ et } \mathbb{E}[X_n] = an^\alpha,$$

avec $a, \alpha > 0$. Supposons qu'il existe des constantes $B > 0$, $0 < \beta < 2\alpha$ t.q.

$$\mathrm{Var}(X_n) \leq Bn^\beta, \quad \forall n \geq 1.$$

Le but est de montrer que $\frac{X_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}-p.s.} a$.

1. Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|X_n - an^\alpha| \geq \delta n^\alpha\Big) \leq \frac{B}{\delta^2} n^{\beta - 2\alpha}, \ \forall n \geq 1.$$

2. (*) Si on prend $n_k = \lfloor k^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \rfloor$, alors

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - an_k^\alpha| \geq \delta n_k^\alpha\Big) < \infty.$$

   En déduire que $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_{n_k}}{n_k^\alpha} = a.$$

3. Conclure à l'aide de la monotonie de X_n.

Exercice 4 Convergence L^p
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de loi :

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \ \text{ et } \ \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 mais qu'elle ne converge pas dans L^2 vers 0.

Exercice 5 LGN faible pour une suite de v.a. dépendantes
Étant donné une suite de variables aléatoires $X_1, \ X_2, \ \cdots, X_n, \cdots$, supposons que

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X_n X_m] = f(n-m), \forall 1 \leq m \leq n,$$

où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $f(k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{en probab}} 0.$$

Exercice 6
Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}) dx_1 \ldots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.