

---

**Feuille de TD 7**

Convergence en loi, tension, Théorème de P. Lévy, TCL, intervalles de confiance

---

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Exercice 1 Convergence en loi, tension**

1. Donner un exemple d'une suite de couples de variables aléatoires  $(X_n, Y_n)_n$  telle que  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ ,  $(Y_n)_n$  converge en loi vers  $Y$  et que  $X_n + Y_n$  ne converge pas en loi.
2. Supposons que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ . Si  $Y$  est une constante  $c$  p.s., montrer que  $X_n + Y_n$  converge en loi vers  $X + c$ .
3. Si une suite de variables aléatoires  $Z_n$  converge en loi vers  $Z$ , montrer que  $(Z_n)$  est tendue.
4. Donner un exemple d'une suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \geq 1}$  telle que  $(Z_n)$  soit tendue et que  $(Z_n)$  ne converge pas en loi.
5. Si une suite de variables aléatoires  $Z_n$  converge en loi vers  $Z$ , est-ce que  $Z_n - Z$  converge en loi vers 0? Si oui, le justifier. Sinon, donner un contre-exemple.
6. Si une suite de variables aléatoires  $Z_n$  converge en loi vers  $Z$ , est-ce que  $\mathbb{E}[Z_n] \rightarrow \mathbb{E}[Z]$ ? Si oui, le justifier. Sinon, donner un contre-exemple.

**Exercice 2**

1. Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $X_n$  une variable aléatoire de densité  $f_n(x) = 1_{[0,1]}(x)(1 - \cos(2\pi nx))$ . Est-ce que  $f_n$  converge? Est-ce que  $X_n$  converge en loi? Si oui, déterminer la limite.
2. Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $Y_n$  une variable aléatoire de densité  $g_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$ . Étudier la convergence en loi de  $(Y_n)$ . Étudier  $\mathbb{E}[Y_n]$ .
3. Soit  $\lambda > 0$ . Pour tout entier  $n \geq \lambda$ , on prend  $(X_{n,i})_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre  $p_n = \frac{\lambda}{n}$ . On considère alors la variable aléatoire

$$N_n := \frac{1}{n} \inf\{i \geq 1 : X_{n,i} = 1\}.$$

Montrer que  $N_n$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

**Exercice 3**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Soit  $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ .

1. On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

Calculer sa fonction caractéristique.

- Calculer la fonction caractéristique de  $S$  qui suit la loi uniforme dans  $[-1, 1]$ .
- Montrer que  $(S_n)$  converge en loi vers  $S$ .

*Indication* :  $\sin(t) = 2 \sin(t/2) \cos(t/2) = \dots = 2^n \sin(t/2^n) \prod_{k=1}^n \cos(t/2^k)$ .

#### Exercice 4

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale  $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . Si  $X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , montrer que  $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$ .

#### Exercice 5

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

- Déterminer la loi de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  et calculer  $\mathbb{P}(S_n \leq n)$ .
- On pose  $Z_n = \frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$ . Montrer que la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.
- En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

#### Exercice 6

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer la convergence en loi de la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$  où

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$$

vers une loi qu'on explicitera.

#### Exercice 7 Intervalles de confiance

Deux candidats sont en lice pour la prochaine élection, A et B. Un sondage donne A gagnant avec 55% des voix contre 45% pour son adversaire. On va construire un intervalle de confiance pour la proportion de votants en faveur de A, au niveau  $1 - \alpha = 95\%$ .

- Modéliser ce problème et donner un estimateur de cette proportion.
- Supposons que 250 personnes ont été sondées. Donner l'intervalle de confiance asymptotique au niveau 95%.