Partiel du 27 mars 2018 - Durée : 2 heures

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Questions de cours (3 points) *On attend une rédaction parfaite, tout oubli sera sanctionné.*
1 - Enoncer la loi forte des grands nombres.
2 - Enoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli.

Exercice 1. (7 points) Etant donné un réel $a > 0$, on dit que X suit une loi de Paréto de paramètre a si $X = \exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle de paramètre a.

(1) (a) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

(b) En déduire que X admet une densité de probabilité f_X et en donner une expression.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur a assurant que X admette un moment d'ordre k.

(b) Sous cette condition, calculer ce moment d'ordre k.

(3) Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X et qui suit aussi la loi de Paréto de paramètre a. Démontrer que la variable aléatoire $W = \min(X, Y)$ suit encore une loi de Paréto dont on déterminera le paramètre.

(4) Donner la loi de $V = XY$.

Exercice 2. (4 points) Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = (1 - p)p^n$).

(1) Calculer la probabilité que X soit impaire.

(2) On définit la variable

$$Y = \left|\sin\left(\pi \frac{X}{2}\right)\right| \left(\frac{X-1}{2}\right).$$

Dans quel ensemble Y prend-elle ses valeurs ? Déterminer sa loi et calculer $\mathbf{E}[Y]$.

Exercice 3. (6 points) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pour tout $a > 0$, on considère l'événement $A_{n,a} = \{\frac{X_n}{\ln n} \geq a\}$.

(1) Pour $n \geq 2$, calculer $\mathbf{P}(A_{n,a})$ pour $a > 0$ quelconque.

(2) Pour $a > 0$, on considère l'événement

$$A_a = \limsup_{n\to+\infty} A_{n,a} = \bigcap_{n\geq 2} \bigcup_{k\geq n} A_{k,a}.$$

Montrer que $\mathbf{P}(A_a) = 0$ si $a > 1$ et que $\mathbf{P}(A_a) = 1$ si $0 < a \leq 1$.

(3) Justifier que pour tout $a > 0$,

$$\left\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\} \subset A_a \subset \left\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} \geq a\right\}.$$

(4) En déduire que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1 \quad \text{presque sûrement.}$$