Université Claude Bernard
L3 Probabilités et Statistiques

Mathématiques

TP 1

On rappelle que la commande `help` X permet d'obtenir une aide détaillée sur la commande X.

Exercice 1 Visualisation des lois discrètes

1. (a) Exécuter le code suivant, qui permet de visualiser les résultats de 100 tirages indépendants selon la loi binomiale $B(20, 1/5)$ et de comparer avec la valeur théorique.

```
X = grand(100,1,"bin",20,0.2);
F = tabul(X)   // tableau des effectifs
F(:,2) = F(:,2)/100
plot2d3(F(:,1),F(:,2))
plot2d(0:20,binomial(0.2,20),style=[-1])
```

   (b) Qu'observe-t-on quand on remplace 100 par une valeur plus grande ? Quel théorème justifie cela ?

   (c) Visualisez de manière similaire les loi de Poisson $P(1)$, $P(4)$ et $P(50)$.

   (d) A quoi ressemble le graphique obtenu pour $P(4)$? Pourquoi ?

   (e) A quoi ressemble le graphique obtenu pour $P(50)$? Pourquoi ?

   (f) On a vu le résultat suivant : si X et Y sont indépendantes, avec $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$, alors $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$. Vérifiez visuellement ce résultat pour $\lambda = 1$, $\mu = 2$.

   (g) (*) Comparer le temps mis par scilab pour générer des v.a. de loi $B(10^2, 10^{-2})$ et $B(10^9, 10^{-9})$. Pourquoi le résultat est-il surprenant ?

2. (a) En utilisant la commande `cumsum`, modifier le code de la question (1a) pour qu'il trace la fonction de répartition (empirique et théorique).

   (b) Si $X \sim P(2)$ et $Y \sim P(3)$, tracer sur un même graphe les fonctions de répartitions F_X et F_Y et conjecturer une inégalité entre ces fonctions. (*) Sauriez-vous la démontrer ?

Exercice 2 Loi des grands nombres

Le but de cet exercice est de visualiser la loi forte des grands nombres. On se donne une suite de v.a. i.i.d. $(X_n)_{n \geqslant 1}$, et on s'intéresse au comportement asymptotique de

$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

en fonction de différents choix pour la loi de X_1

1. (a) On suppose que X_n suit la loi uniforme dans l'intervalle $[0, 2]$. Utiliser la commande `grand` pour générer un tableau `X` contenant les valeurs des v.a. $(X_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$, pour $N = 10^5$

   (b) En une seule instruction, générez un tableau `Y` contenant les valeurs des v.a. $(Y_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$.

   (c) Visualisez le comportement de la suite (Y_n) à l'aide de la commande `plot([1:N],Y)`. Qu'observe-t-on ?

2. Reprendre les questions précédentes lorsque X_n suit la loi de $1/U$, où U suit la loi uniforme dans l'intervalle $[0, 2]$. Qu'observe-t-on ? (*) Sauriez-vous le démontrer ?

3. Reprendre les questions précédentes lorsque X_n suit la loi de $1/V$, où V suit la loi uniforme dans l'intervalle $[-1, 1]$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 3 Théorème central limite

1. Reprendre le code de l'exercice précédent pour visualiser la suite
$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}},$$
où les (X_n) sont i.i.d. de loi Ber(1/2). Qu'observe-t-on ?
2. Comprendre et exécuter le code suivant qui permet de tracer l'histrogramme de n copies indépendantes de la variable Z_N. Faites varier n et N ; qu'observe-t-on ?
```
n=10000;
N=100;
X=(2*grand(1,n,'bin',N,1/2)-N)/sqrt(N);
histplot(int(sqrt(n)),X)
```
3. Que fait le code suivant ? Pourquoi est-ce pertinent ?
```
T=[-3:0.1:3];
U=exp(-T.^2/2)/sqrt(2*%pi);
plot(T,U)
```

Exercice 4 Processus de branchement

On s'intéresse à la simulation d'un processus de branchement. On rappelle qu'on peut le définir par récurrence à partir du nombre initial d'individus Z_0 comme
$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}$$
à partir de v.a. i.i.d. $(\xi_{n,i})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$, dont on note μ la loi, appelée loi de branchement.

1. (a) Comprendre et exécuter le code suivant qui simule 1000 générations d'un processus, pour la loi de branchement $\mu(0) = 1/4$, $\mu(1) = 1/2$, $\mu(2) = 1/4$.
```
mu=[0.25,0.5,0.25];
T=1000; // nombre de générations simulées
Z=zeros(1,T+1)
Z(1)=30; // population initiale
for t=1:T
    u=rand(1,Z(t));
    M=zeros(1,Z(t));
    for k=1:size(mu,2)
        M(1:Z(t))=M(1:Z(t)) + (u>=sum(mu(1:k)));
    end
Z(t+1)=sum(M);
end
```
   (b) Tracer le graphe du nombre d'individus en fonction du temps. Vous pouvez effectuer plusieurs simulations pour voir si le comportement observé est le même.
   (c) Que prévoit la théorie ? Est-ce cohérent avec les observations de la question précédente ?
2. Comparer graphiquement les comportements pour les lois initiales suivantes et vérifier si cela est conforme à ce que prédit la théorie (attention, commencer par simuler un petit nombre de générations car la taille de la population peut parfois croître exponentiellement vite)
   (a) $\mu(0) = 0.25$, $\mu(1) = 0.55$, $\mu(2) = 0.2$
   (b) $\mu(0) = 0.25$, $\mu(1) = 0.45$, $\mu(2) = 0.3$
   (c) $\mu(0) = 0.9$, $\mu(10) = 0.1$
   (d) $\mu(0) = 0.9$, $\mu(11) = 0.1$
3. On reprend la loi de branchement de la question 2b en supposant que $Z_0 = 1$.
   (a) Calculer la probabilité d'extinction théorique pour ce processus.
   (b) Vérifier expérimentalement que la probabilité d'extinction observée est la même (simuler un grand nombre de populations, et regarder quelle proportion s'éteint).