Corrigé du partiel du 27 mars 2018

Questions de cours : (3pts)

Exercice 1. (7pts)

(1) (a) On cherche à expliciter la fonction

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbf{P}(X \leq t) \\ &= \mathbf{P}(e^Z \leq t) \end{aligned}$$

La variable aléatoire Z étant (presque sûrement) positive, F_X est nulle si $t \leq 1$. La fonction $\ln : x \to \ln(x)$ étant bijective, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que si $t > 1$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbf{P}(Z \leq \ln(t)) \\ &= a\int_0^{\ln(t)} e^{-ax}\,dx \\ &= 1 - \frac{1}{t^a}. \end{aligned}$$

(b) La fonction F_X étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 1, la loi de X admet une densité donnée par :

$$f_X(t) = \frac{a}{t^{a+1}}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

(2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) La variable aléatoire X admet un moment d'ordre k si $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$. Par la formule du transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X|^k] &= \mathbb{E}[X^k] \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)dx \\ &= a\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a-k+1}}\,dx < +\infty \end{aligned}$$

si et seulement si $a > k$.

(b) Supposons que $a > k$. Son moment d'ordre k vaut alors $a/(a-k)$.

(3) Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X et qui suit aussi la loi de Paréto de paramètre a. On cherche à déterminer la loi de $W = \min(X, Y)$.

Notons F_W la fonction de répartition de W. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \mathbf{P}(W \leq t) \\ &= \mathbf{P}(\min(X,Y) \leq t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\min(X,Y) > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X > t)\mathbf{P}(Y > t) \text{ car } X \perp Y \\ &= 1 - (1 - F_X(t))^2 \text{ car } X \sim Y \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^{2a}} & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit que la loi de W est la loi de Paréto de paramètre $2a$.

(4) Loi de $V = XY$. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\psi(V)] &= \mathbf{E}[\psi(XY)] \\ &= \int_\Omega \psi(XY)\, d\mathbf{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\, d\mathbf{P}_{(X,Y)}(x,y) \;\; \text{par la FDT} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\, d\mathbf{P}_X(x) d\mathbf{P}_Y(y) \;\; \text{car } X \perp Y \\ &= a^2 \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \psi(xy) \frac{dxdy}{x^{a+1}y^{a+1}} \;\; \text{car } X, Y \sim Pareto(a) \\ &= a^2 \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \psi(xy) \frac{dx}{x^{a+1}} \right) \frac{dy}{y^{a+1}} \;\; \text{par Fubini-Tonelli} \\ &= a^2 \int_1^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \psi(u) \frac{du}{u^{a+1}} \right) \frac{dy}{y} \;\; \text{par le changement de variables } u = xy \\ &= a^2 \int_1^{+\infty} \psi(u) \left(\int_1^u \frac{dy}{y} \right) \frac{du}{u^{a+1}} \;\; \text{par Fubini-Tonelli} \\ &= a^2 \int_{\mathbb{R}} \psi(u) \frac{\ln(u)}{u^{a+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(u)\, du \end{aligned}$$

On en déduit que la loi de V a pour densité la fonction

$$f_V(v) = a^2 \frac{\ln(v)}{v^{a+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(v).$$

Exercice 2. (4pts) On donne seulement les résultats. On renvoie pour les détails à l'exercice 5 de la feuille TD1.

(1) La probabilité que X soit impaire vaut $p/(1+p)$.

(2) — $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

— $\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(\{X \text{ paire}\}) + \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{1+p} + (1-p)p$

— Soit $k \geq 1$. $\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = 2k+1) = (1-p)p^{2k+1}$

—

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{p^3}{(1+p)^2(1-p)}$$

Exercice 3. (6pts) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pour tout $a > 0$, on considère l'événement $A_{n,a} = \{\frac{X_n}{\ln n} \geq a\}$.

(1) Soit $n \geq 2$ et $a > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n,a}) &= \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} \geq a\right) \\ &= \int_{a \ln n}^{+\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{n^a}. \end{aligned}$$

(2) Pour $a > 0$, on considère l'événement

$$A_a = \limsup_{n\to+\infty} A_{n,a} = \bigcap_{n\geq 2} \bigcup_{k\geq n} A_{k,a}.$$

Si $a > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 2} \mathbf{P}(A_{n,a})$ converge donc d'après le premier lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que $\mathbf{P}(A_a) = 0$.
Si $0 < a \leq 1$, alors la série $\sum_{n\geq 2} \mathbf{P}(A_{n,a})$ diverge. Les variables aléatoires X_n étant indépendantes, on en déduit par le second lemme de Borel-Cantelli que $\mathbf{P}(A_a) = 1$.

(3) Montrons la première inclusion. Soit $a > 0$. Soit $\omega \in \left\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\}$. Notons $l = \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n(\omega)}{\ln n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel $\sup_{k\geq n} \frac{X_k(\omega)}{\ln k} \geq l - \varepsilon$. En choisissant $\varepsilon = l - a > 0$, on en déduit qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $\frac{X_n(\omega)}{\ln n} \geq a$ donc $\omega \in A_a$.
Montrons la deuxième inclusion. Soit $\omega \in A_a$. Pour tout $n \geq 2$, il existe $k \geq n$ tel que $\frac{X_k(\omega)}{\ln k} \geq a$. Donc, pour tout $n \geq 2$, $\sup_{k\geq n} \frac{X_k(\omega)}{\ln k} \geq a$. En passant à la limite, on obtient le résultat.

(4) Soit $\varepsilon > 0$. On choisit tout d'abord $a = 1 + \varepsilon > 1$. D'après la question (2) et la première inclusion de (3), on en déduit que

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} > 1 + \varepsilon\right) = 0.$$

En passant au complémentaire, on obtient que

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq 1 + \varepsilon\right) = 1.$$

D'autre part, en choisissant $a = 1 - \varepsilon < 1$ et en utilisant la question (2) ainsi que la deuxième inclusion de (3), on en déduit que

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} \geq 1 - \varepsilon\right) = 1.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(1 - \varepsilon \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq 1 + \varepsilon\right) = 1.$$

Donc, en choisissant $\varepsilon = 1/k$, on en déduit que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(1 - \frac{1}{k} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{k}\right) = 1$$

et par suite

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{1 - \frac{1}{k} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{k}\right\}\right) = 1.$$

D'où,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1\right) = 1.$$