Université Claude Bernard — Mathématiques

L3 Probabilités et Statistiques

Devoir maison

La loi forte des grands nombres sous l'hypothèse L^1.

Ce devoir maison est *facultatif* et plus difficile que ce qui est attendu en examen. Si votre but est d'obtenir l'UE avec la note de $10+\varepsilon$, il peut être judicieux de concentrer plutôt vos efforts sur les révisions de cours et TD. Il est tout à fait possible de rendre une copie où vous ne répondez qu'à une partie des questions ; de même si vous bloquez je peux vous donner des indications. Si vous souhaitez rendre le DM, faites-le avant le 4 avril ; je corrigerai les copies mais ne mettrai pas de notes. Si vous voulez une version imprimée du sujet, demandez-moi au bureau Braconnier 227.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. L^1. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et on veut montrer que la suite S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$. On note $Y_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leqslant n}$ et on pose $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_k| > k) \leqslant \mathbf{E}|X_1|.$$
2. Montrer que
$$\mathbf{P}(X_k \neq Y_k \text{ pour une infinité de } k \in \mathbf{N}) = 0.$$
3. En déduire que si T_n/n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$, il en est de même de S_n/n.
4. Montrer que pour tout réel $y > 0$,
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \mathbf{1}_{k>y} \leqslant 2/y.$$
5. Montrer que
$$\mathbf{E}Y_k^2 = \int_0^{\infty} 2y\mathbf{P}(|Y_k| \geqslant y)dy.$$
6. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \mathbf{Var}(Y_k) \leqslant 4\mathbf{E}|X_1|.$$
7. On se donne un réel $\alpha > 1$, et on note $k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor$. En estimant
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|T_{k(n)} - \mathbf{E}T_{k(n)}| \geqslant \varepsilon k(n)\right)$$
en fonction de $\mathbf{Var}(Y_m)$, montrer que, presque sûrement,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{k(n)} - \mathbf{E}T_{k(n)}}{k(n)} = 0.$$
8. En déduire que $\frac{1}{k(n)} T_{k(n)}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$.
9. Dans cette question, on suppose que les variables aléatoires (X_n) sont positives ; c'est donc également le cas des variables aléatoires (Y_n). En faisant un encadrement judicieux, montrer que, presque sûrement,
$$\alpha^{-1}\mathbf{E}X_1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \leqslant \alpha\mathbf{E}X_1.$$
En déduire que, presque sûrement,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mathbf{E}X_1.$$
10. Conclure également dans le cas où l'on ne suppose plus que les variables aléatoires (X_n) sont positives.
11. On a en fait utilisé une hypothèse plus faible que «i.i.d.» ; laquelle ?