Université Lyon 1 Mathématiques
L3 Probabilités et Statistiques

**Examen du 28 mai 2018**
Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits.

**Rappels.** Une variable aléatoire $X$ suit une loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$ si la densité de $X$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

**Exercice 1** *(5 points)*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = 0) = 1/2$. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$Y_n = X_n + X_{n+1}.$$

1. *(1 point)* Les v.a. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont-elles identiquement distribuées ? Justifier.
2. *(1 point)* Pour $n \geqslant 1$, déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y_n$.
3. *(1 point)* Les v.a. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.
4. *(1 point)* Les v.a. $(Y_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.
5. *(1 point)* Montrer que la suite $\left(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers une v.a. à préciser.

**Exercice 2** *(4 points)*

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes de loi $N(0, 1)$.

1. *(2 points)* Calculer $\mathbf{E}[|X|]$.
2. *(2 points)* Calculer $\mathbf{E}[\max(X, Y)]$.
   **Indication :** *on pourra utiliser la relation* $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

**Exercice 3** *(5 points)*

Soit $p \in [0, \frac{1}{2}]$ et $X$ une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = p$. On note $Z_n$ le nombre d'individus à la génération $n$ d'un processus de branchement où on suppose $Z_0 = 1$ et $Z_1 \overset{\text{loi}}{\sim} X$.

1. *(1 point)* Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. *(1 point)* Quelle est la probabilité d'extinction du processus de branchement ?
3. *(1 point)* Montrer que pour tout réel $a > \mathbf{E}[X]$, il existe $r \in [0, 1[$ tel que
$$\mathbf{P}(Z_n \geqslant a^n) \leqslant r^n.$$
4. *(2 points)* En déduire que presque sûrement
$$\limsup_{n\to\infty} Z_n^{1/n} \leqslant \mathbf{E}[X].$$

**Exercice 4** *(4 points)*

1. *(2 points)* Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi. Montrer que cette suite est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $n$, $\mathbf{P}(|X_n| \geqslant K) \leqslant \varepsilon$.
2. *(2 points)* Montrer que si $(X_n)$ est une suite tendue de variables aléatoires et si $(Y_n)$ tend vers 0 en probabilité, alors $(X_n Y_n)$ tend vers 0 en probabilité.

**Exercice 5** *(4 points)*

1. *(1 point)* Calculer la fonction caractéristique d'une v.a. de loi $P(\lambda)$ (la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$).
2. *(1 point)* En déduire une preuve du fait suivant : si $X$ et $Y$ sont des v.a. indépendantes, avec $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$, alors $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.
3. *(2 points)* Soit $X_1$ une v.a. de loi $P(\lambda_1)$ et $X_2$ une v.a. de loi $P(\lambda_2)$. On suppose $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. En utilisant le résultat de la question 2, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathbf{P}(X_1 \geqslant n) \leqslant \mathbf{P}(X_2 \geqslant n).$$