Feuille de TD 2

Fonction caractéristique, Inégalité de Markov et Indépendance.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Fonctions caractéristiques
Calculer les fonctions caractéristiques associées aux v. a. suivantes :

1. soit X une v.a. de loi $Poisson(\lambda)$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$
2. soit Y une v.a. de loi $\mathbb{P}_Y(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.
3. soit $U = X + Z$ avec $X \sim Poisson(\lambda)$ et $Z \sim Poisson(\mu)$ indépendantes.
4. soit $V = YW$ avec $Y \sim \mathbb{P}_Y(\mathrm{d}x) = e^{-x}1_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}x$ et $W \sim Ber(\frac{1}{2})$ indépendantes.

Exercice 2
Soient $X, Y, Z : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de lois $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Z = (1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_1$. Soit
$$A_1 := \{Y = Z\},\ A_2 := \{Z = X\},\ A_3 := \{X = Y\}.$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 3
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants ssi $A_1^c, \ldots, A_n^c$ sont indépendants.

Exercice 4 Loi Exponentielle
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que
$$\mathbb{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x}1_{\mathbb{R}_+}(x)dx,\ \mathbb{P}_Y(dy) = \mu e^{-\mu y}1_{\mathbb{R}_+}(y)dy,$$
avec $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

1. Calculer leurs fonctions de répartition F_X et F_Y.
2. Déterminer la loi de $Z := \min\{X, Y\}$. Puis calculer $\mathbb{P}(Z = X)$.
3. Déterminer la loi de $S := X + Y$.

Exercice 5 (Partiel mars 2018)
Etant donné un réel $a > 0$, on dit que X suit une loi de Paréto de paramètre a si $X = \exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle de paramètre a.

1. (a) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 1, \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

(b) En déduire que X admet une densité de probabilité f_X et en donner une expression.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$
   (a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur a assurant que X admette un moment d'ordre k.
   (b) Sous cette condition, calculer ce moment d'ordre k.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X et qui suit aussi la loi de Paréto de paramètre a. Démontrer que la variable aléatoire $W = \min(X, Y)$ suit encore une loi de Paréto dont on déterminera le paramètre.
4. Donner la loi de $V = XY$.

Exercice 6
Soit $U : \Omega \longrightarrow [0,1]$ une variable aléatoire de loi uniforme. On pose

$$X = -\mathbf{1}_{[0,1/4[}(U)+\mathbf{1}_{[1/4,1/2[}(U),\ \ X' = -\mathbf{1}_{[1/2,3/4[}(U)+\mathbf{1}_{[3/4,1]}(U) \text{ et } A = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = X'(\omega)\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$, puis que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.
2. Etablir que $\mathbb{E}[XX'] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X']$.
3. Montrer que les variables aléatoires X et X' ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 Loi d'un couple de v.a.

1. Soient X, Y, X', Y' des v.a. telles que $(X, Y) \overset{\text{loi}}{=} (X', Y')$. Est-il vrai que $X \overset{\text{loi}}{=} X'$ et $Y \overset{\text{loi}}{=} Y'$? Que pensez-vous de la réciproque ?
2. Donner toutes les lois possibles d'un couple de v.a. (X, Y) tel que X et Y sont des variables de loi de Bernoulli$(1/2)$.

Exercice 8
Soit X, Y deux v.a. indépendantes. Soit $p > 0$ un réel donné.

1. Montrer l'équivalence suivante :
$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}[|X - a|^p] < \infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$
2. $(*)$ Si $\mathbb{E}[|X + Y|^p] < \infty$, montrer que
$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty.$$
3. (Indication : $\forall x, y \geq 0$, $(x + y)^p \leq x^p + y^p$ si $0 < p \leq 1$; $(x + y)^p \leq 2^p(x^p + y^p)$ si $p > 1$)

Exercice 9
Soit X une v.a. indépendante d'elle même. On va démontrer qu'elle est une constante $\mathbb{P}$-p.s.

1. Soit $I_n = [n, n + 1[$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\mathbb{P}(X \in I_n) = 1.$$
En déduire que $\mathbb{E}[X]$ existe.
2. Soit $c = \mathbb{E}[X]$, montrer que
$$\mathbb{E}[(X - c)^2] = 0.$$
En déduire que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Exercice 10 Azuma-Hoeffding inequality

Soient $X_1, \cdots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{E}[X_i] = 0,\ |X_i| \leq 1,\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Soit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. On va montrer que pour $\forall a > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

1. Montrer que
$$e^{tx} \leq \frac{1+x}{2} e^t + \frac{1-x}{2} e^{-t}, \forall x \in [-1, 1], \forall t \in \mathbb{R}.$$
En déduire que pour $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$
$$\mathbb{E}[e^{tX_i}] \leq \cosh(t).$$

2. Montrer que
$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$
Indication : $\cosh(t) \leq e^{t^2/2}$.

3. Montrer que $\forall a > 0$,
$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$