Feuille de TD 3

Indépendance (suite), lois usuelles

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 [Espérances et variances des lois usuelles]
Rappeler l'expression et calculer l'espérance et la variance des lois suivantes.

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$,
2. Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$,
3. Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$,
4. Gaussienne de moyenne $m \in \mathbb{R}$, de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$,
5. Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$,
6. Exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 [Stabilité par somme]
Soient X, Y deux v.a. indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ dans les cas suivants.

1. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$
2. $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$,
3. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\tilde{m}, \tilde{\sigma}^2)$, avec $m, \tilde{m} \in \mathbb{R}$, $\sigma^2, \tilde{\sigma}^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 [Lois géométriques]
Soient X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, $Y \sim \mathrm{Geom}(p')$, $p, p' \in]0, 1[$.

1. Calculer la loi de $\min(X, Y)$.
2. Cela vous rappelle-t-il une autre famille de variables aléatoires ?

Exercice 4 [Loi exponentielle et compagnie]
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2, \ldots$ une suite i.i.d. de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

1. Calculer la loi de $\lfloor X_1 \rfloor$.
2. Calculer la loi de $\max\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$.
3. Calculer la loi de $\min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$.
4. Soient $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s \leq t$. On définit $N_{s,t} := |\{k \geq 1 : \sum_{i=1}^{k} X_i \in [s, t]\}|$. Calculer la loi de $N_{s,t}$.

Exercice 5 [Partiel Mars 2015]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de T^{-1} si T est une variable aléatoire de loi de Cauchy. (Une v.a. X est de loi de Cauchy si sa loi admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$).
3. Déterminer la loi de $Z = X^2 + Y^2$.

Exercice 6 [Lois Gamma, Exponentielle et Gaussienne]
Une variable aléatoire X suit une *loi gamma de paramètres* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, notée $\Gamma(\alpha,\beta)$, si elle admet une densité sur $\mathbb{R}_*^+$ de la forme $f(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, et $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1,\beta)$ et $\Gamma(\alpha_2,\beta)$. Montrer que $U = X+Y$ et $V = X/(X+Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes, et déterminer la loi de U. On pourra utiliser l'identité suivante :
$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} = \int_0^1 v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}dv.$$
3. Calculer, pour $t < \beta$, $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.
4. On admet que la fonction caractéristique de X est $\varphi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-it}\right)^\alpha$. Retrouver la loi de la variable U définie dans la question 2).
5. Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n v.a. indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?
6. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que Y^2 est de loi $\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (On pourra utiliser la relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).
7. Soit $Y_1,\ldots,Y_n$ n v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la loi de $Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2$? Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercice 7 $(*)$

Soit X une v.a.

1. Supposons que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Si $\Lambda_n \in \mathcal{F}$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) = 0.$$
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\Lambda_n}|X|\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$.
2. On NE suppose PAS que $\mathbb{E}\left[\frac{1}{|X|}\right] < \infty$. Montrer que
$$\lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}\Big[\frac{1}{|X|}\mathbf{1}_{\{|X|>y\}}\Big] = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{y\to 0} y\mathbb{E}\Big[\frac{1}{|X|}\mathbf{1}_{\{|X|>y\}}\Big] = 0.$$
3. Soit $r > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X|^r] = \int_0^\infty rx^{r-1}\mathbb{P}(|X| > x)\mathrm{dx}.$$
4. Supposons que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ pour un certain $p > 0$. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x^p\mathbb{P}(|X| > x) = 0.$$
Réciproquement, si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p\mathbb{P}(|X|>x) = 0$, montrer que pour tout $q \in\,]0,p[$,
$$\mathbb{E}[|X|^q] < \infty.$$