
Feuille de TD 4

Convergence en probabilité, presque sûre, Lemmes de Borel-Cantelli

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.

On rappelle que si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} , alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit X_n , $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles. La suite X_n converge presque sûrement (p.s. ou \mathbb{P} -p.s.) vers une v.a. X si

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega; X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega) \right\} \right) = 1.$$

1. Montrer que si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} , les deux événements $\limsup_n A_n$ et $\{\text{une infinité des } A_n \text{ est réalisée}\}$ sont égaux.
2. Supposons que les v.a. X_n , $n \geq 1$ sont indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$

- (a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \rightarrow 0$.
- (b) Montrer que

$$\left\{ X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right\} = \left(\limsup_n \{X_n = 1\} \right)^c.$$

- (c) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.
3. Montrer que $X_n \rightarrow \infty$ p.s. si et seulement si

$$\forall M > 0, \mathbb{P}(\limsup_n \{X_n < M\}) = 0.$$

Exercice 2

Montrer que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie identique, la séquence PFP (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. À l'aide de la loi faible des grands nombres, donner la fréquence d'apparition de cette séquence (on pourra rassembler les variables en paquets de variables indépendantes).

Exercice 3 LGN faible pour une suite de v.a. dépendantes

Étant donné une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, supposons que

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X_n X_m] = f(n - m), \forall 1 \leq m \leq n,$$

où $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $f(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Montrer que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Exercice 4 Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles. On suppose que X_n converge en probabilité vers X , et Y_n converge en probabilité vers Y .

1. Montrer que si de plus

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y,$$

alors $X = Y$ \mathbb{P} -p.s.

2. Montrer que

$$X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \pm Y.$$

3. Montrer que

$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY.$$

Exercice 5

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit les événements $A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et déterminer l'ensemble $\limsup_n A_n$.
2. En déduire un contre-exemple du second lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 6 Loi des grands nombres et Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, i.i.d.

1. Si $0 < \mathbb{E}[X_1] < \infty$, montrer que \mathbb{P} -p.s.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty.$$

2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}[X_1] < \infty \iff \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) < \infty.$$

En déduire que \mathbb{P} -p.s.,

$$\limsup_n \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty. \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

Exercice 7

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1.$$

2. On pose $Z_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\log n}$ pour tout $n \geq 2$, montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1, \text{ p.s.}$$

3. (*) Montrer que pour une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k \rightarrow \infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 1, \text{ p.s.}$$