Feuille de TD 5

Processus de branchement, Borel-Cantelli, convergence p.s.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Processus de branchement Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tels que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. On considère le processus de branchement dont la loi de reproduction est donnée par les p_k. On note $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ et Z_n le nombre d'individus à la génération n. On suppose comme d'habitude $Z_0 = 1$.

1. Donner la probabilité d'extinction dans les cas particuliers suivants.
   (a) $p_2 = 1 - p_0 = p$, $p \in [0,1]$,
   (b) (*) $p_0 = 1 - b/p$ et $p_k = b(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, où $p \in [0,1], b \in [0,p]$.
2. Donner une CNS pour que la probabilité d'extinction soit 0.
3. Calculer l'espérance de Z_n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. (*) Calculer la variance de Z_n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Si T est le nombre total d'individus, calculer $\mathbb{E}[T]$.
6. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n > 0) \leq \mu^n \wedge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Si $\mu = 1$ et $p_1 < 1$, montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{en probab}} 0$. $(Z_n)_n$ converge-t-elle dans $L^1(\mathbb{P})$?
8. Quelle est la probabilité d'extinction si on suppose $Z_0 > 1$?

Exercice 3
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives t.q.

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \text{ et } \mathbb{E}[X_n] = an^{\alpha},$$

avec $a, \alpha > 0$. Supposons qu'il existe des constantes $B > 0$, $0 < \beta < 2\alpha$ t.q.

$$\mathrm{Var}(X_n) \leq Bn^{\beta}, \quad \forall n \geq 1.$$

Le but est de montrer que $\frac{X_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}-p.s.} a$.

1. Montrer que pour tout $\delta > 0$,
$$\mathbb{P}\Big(|X_n - an^{\alpha}| \geq \delta n^{\alpha}\Big) \leq \frac{B}{\delta^2} n^{\beta - 2\alpha}, \ \forall n \geq 1.$$
2. (*) Si on prend $n_k = \lfloor k^{\frac{2}{2\alpha-\beta}} \rfloor$, alors
$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\Big(|X_{n_k} - an_k^{\alpha}| \geq \delta n_k^{\alpha}\Big) < \infty.$$
   En déduire que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\lim_{k\to\infty} \frac{X_{n_k}}{n_k^{\alpha}} = a.$$
3. Conclure à l'aide de la monotonie de X_n.