Feuille de TD 6

Convergences p.s., en probabilité, dans L^p, LFGN

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Convergence en probabilité, dans L^p

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires. Soit $p > 0$.

1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements tels que $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et X une v.a. intégrable. Montrer que $\int_{A_n} X d\mathbb{P} \to_n 0$.
2. Montrer que si X_n converge dans L^p vers 0, alors X_n converge en probabilité vers 0.
3. Réciproquement, si X_n converge en probabilité vers 0 et si
$$\sup_{n\geq 1} |X_n| \leq Y \in L^p(\mathbb{P}),$$
montrer que X_n converge dans L^p vers 0.
4. Montrer l'équivalence suivante :
$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] \to 0.$$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi
$$\mathbb{P}_{Z_n} = \frac{1}{n^\alpha}\delta_1 + \Big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\Big)\delta_0.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
2. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\limsup_n Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \leq 1. \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 3

Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) dx_1...dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.