Feuille de TD 7

Convergence en loi, tension, Théorème de P. Lévy, TCL

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Convergence en loi, tension

1. Donner un exemple d'une suite de couples de variables aléatoires $(X_n, Y_n)_n$ telle que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, $(Y_n)_n$ converge en loi vers Y et que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi.
2. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Si Y est une constante c p.s., montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + c$.
3. Si une suite de variables aléatoires Z_n converge en loi vers Z, montrer que (Z_n) est tendue.
4. Donner un exemple d'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ telle que (Z_n) soit tendue et que (Z_n) ne converge pas en loi.
5. Si une suite de variables aléatoires Z_n converge en loi vers Z, est-ce que $Z_n - Z$ converge en loi vers 0 ? Si oui, le justifier. Sinon, donner un contre-exemple.
6. Si une suite de variables aléatoires Z_n converge en loi vers Z, est-ce que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[Z]$? Si oui, le justifier. Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 2

1. Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de densité $f_n(x) = 1_{[0,1]}(x)(1 - \cos(2\pi n x))$. Est-ce que f_n converge ? Est-ce que X_n converge en loi ? Si oui, déterminer la limite.
2. Pour tout $n \geq 1$, soit Y_n une variable aléatoire de densité $g_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$. Étudier la convergence en loi de (Y_n). Étudier $\mathbb{E}[Y_n]$.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, montrer que $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

Exercice 4

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq \lambda$, on prend $(X_{n,i})_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. On considère alors la variable aléatoire

$$N_n := \frac{1}{n} \inf\{i \geq 1 : X_{n,i} = 1\}.$$

Montrer que N_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Montrer la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ où

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k$$

vers une loi qu'on explicitera.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Soit $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

1. On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

   Calculer sa fonction caractéristique.

2. Calculer la fonction caractéristique de S qui suit la loi uniforme dans $[-1, 1]$.
3. Montrer que (S_n) converge en loi vers S.
   Indication : $\sin(t) = 2\sin(t/2)\cos(t/2) = \cdots = 2^n \sin(t/2^n)\prod_{k=1}^{n}\cos(t/2^k)$.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et calculer $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.
2. On pose $Z_n = \frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.
3. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$