Feuille de TD 9

Vecteurs gaussiens

On pourra utiliser sans justification suivant le fait suivant : si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des vecteurs gaussiens de même moyenne et de même matrice de covariance, $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont même loi.

Exercice 1. Soit $\rho \in]-1, 1[$, et Γ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur gaussien (X_1, X_2) de moyenne nulle et de matrice de covariance Γ.
2. On pose
$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \quad Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}.$$
Montrer que (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien. Calculer sa moyenne et sa matrice de covariance.
3. Les v.a. Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la marche aléatoire associée. Le but de l'exercice est de calculer
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n \geqslant 0, \ S_{2n} \leqslant 0).$$

1. Quelle est la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(X_1, X_1 + X_2)$?
2. Soit (Z_1, Z_2) un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et (Y_1, Y_2) un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et matrice de covariance Id_2. Montrer que (Z_1, Z_2) et $(Y_1, Y_1 + Y_2)$ ont même loi.
3. Montrer la convergence des vecteurs aléatoires
$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n, S_{2n}) \xrightarrow{loi} (Z_1, Z_2).$$
4. En déduire la convergence des variables aléatoires
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max(-S_n, S_{2n}) \xrightarrow{loi} \max(-Z_1, Z_2).$$
5. Soit $C = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \,:\, y_1 \geqslant 0, \, y_1 + y_2 \leqslant 0\}$. Montrer que
$$\ell = \mathbf{P}((Y_1, Y_2) \in C).$$
6. Montrer que pour toute rotation $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,
$$\mathbf{P}((Y_1, Y_2) \in C) = \mathbf{P}((Y_1, Y_2) \in R(C)).$$
7. A l'aide de la question précédente, calculer ℓ.