Veillez à bien noircir les cases. Chaque case correctement traitée (noircie si réponse juste, non noircie si fausse) rapporte 0,5 point, et chaque case incorrectement traitée rapporte -0,25 point

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre $\longrightarrow$
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous:

Nom et prénom :
....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

On utilise les notations suivantes : $\mathsf{B}(p)$ désigne la loi de Bernoulli de paramètre p, $\mathsf{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n et p, $\mathsf{G}(p)$ la loi géométrique de paramètre p, $\mathsf{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre λ, $\mathsf{N}(m,\sigma^2)$ la loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2.

Question 1 Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathsf{B}(p)$ pour $p \in]0,1[$.

■ La suite $(\min(X_1,\ldots,X_n))$ converge en probabilité vers 0

■ La suite $(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})$ converge en probabilité vers p

□ La suite (X_n) converge en probabilité vers p

■ La suite $(\max(X_1,\ldots,X_n))$ converge en probabilité vers 1

Question 2 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants avec $\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

□ $\mathbf{P}\left(\limsup(A_{2n} \cap A_{2n+1})\right) = 1$

■ $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) = 0$

■ $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = 1$

■ $\mathbf{P}\left(\limsup(A_n)\right) = 1$

Question 3 Soit X une variable aléatoire et Φ_X sa fonction caractéristique

■ $\Phi_X(0) = 1$

□ $\Phi_X(0) = 0$

■ $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$

■ $\Phi_{-X}(t) = \Phi_X(-t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$

Question 4 Soient $X \sim \mathsf{B}(p)$ et $Y \sim \mathsf{B}(q)$ des v.a. indépendantes.

■ $1 - X \sim \mathsf{B}(1-p)$

■ $\min(X,Y) \sim \mathsf{B}(pq)$

■ $\mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$

■ $\mathbf{Var}(X+Y) = p(1-p) + q(1-q)$

Question 5 Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.

- [ ] $X+Y$ suit une loi uniforme sur $]0,2[$
- [x] $\mathbf{E}(\cos X) = \mathbf{E}(\cos Y)$
- [x] $\mathbf{E}\left[\frac{1}{X^6}\right] = +\infty$
- [x] $\mathbf{P}(X=Y) = 0$

Question 6 Soit (S_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$ (autrement dit, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec (X_n) i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$). Alors

- [x] $\mathbf{P}(\limsup S_n = +\infty) = 1$
- [ ] $\mathbf{P}(\limsup S_n = -\infty) = 1$
- [ ] $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = \frac{1}{2}$
- [x] $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = 0$

Question 7 Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité $(x,y) \mapsto \exp(-x-y)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$

- [x] X et Y sont indépendantes
- [ ] X suit la loi uniforme sur $\mathbf{R}^+$
- [ ] $X+Y$ suit la loi de densité $t \mapsto \exp(-t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$
- [x] X et Y ont même loi

Question 8 Soit (X_n) une suite de v.a. qui converge en probabilité vers une v.a. X

- [x] $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| < 2) = 1$
- [x] $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > 1) = 0$
- [x] (X_{2n}) converge en probabilité vers X
- [ ] Il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = a) = 1$

Question 9 Soit X et Y deux v.a. indépendantes.

- [x] Si $X \sim \mathsf{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathsf{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathsf{P}(\lambda+\mu)$
- [ ] Si $X \sim \mathsf{G}(p)$ et $Y \sim \mathsf{G}(q)$, alors $X+Y \sim \mathsf{G}(p+q)$
- [x] Si $X \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathsf{N}(0,\tau^2)$, alors $X+Y \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2+\tau^2)$
- [ ] Si $X \sim \mathsf{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathsf{B}(n,q)$, alors $X+Y \sim \mathsf{B}(n,p+q)$

Question 10 Soit $n \geqslant 1$, $(X_1,\ldots,X_n)$ des v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- [x] La suite $(\mathbf{E}\, S_n)$ est croissante
- [ ] S_n est à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$
- [x] $\mathbf{P}(S_n = 1) = \frac{n}{2^n}$
- [x] La suite $(\mathbf{Var}\, S_n)$ est croissante